



Universidade de Aveiro
Departamento de Matemática

Regularidade Lipschitziana dos minimizantes no Cálculo das Variações e Controlo Óptimo

Delfim Fernando Marado Torres

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro como requisito parcial
para obtenção do grau de Mestre em Optimização e Teoria do Controlo

Dezembro de 1997

Resumo

Apresentamos um estudo unificado da regularidade lipschitziana dos minimizantes, para o problema básico do Cálculo das Variações (CV) e suas generalizações. Numa primeira parte, de síntese, introduzimos o problema; damos a sua condição necessária clássica de minimalidade - a equação de Euler-Lagrange; formulamos o teorema da existência de Tonelli; e demonstramos vários resultados de regularidade (incluindo a descrição do fenómeno de Lavrentiev). Na segunda parte, usamos a abordagem do Controlo Óptimo, para obter um novo resultado de regularidade lipschitziana para os *minimizantes do problema básico do CV*. A mesma estratégia é depois estendida a problemas com derivadas de ordem superior.

Palavras Chave. cálculo das variações, controlo óptimo, teoremas de existência, regularidade lipschitziana dos minimizantes.

Abstract

In this dissertation problems of the Calculus of Variations (CV) are studied, and in particular the questions of lipschitzian regularity of minimizers are addressed. The work consists of two main parts. Part I is a survey: we start with the basic problem of the CV, then we introduce Euler-Lagrange necessary minimality condition and formulate classical existence and regularity results for minimizers, including the Lavrentiev phenomenon. In Part II we utilize an approach of Optimal Control theory, to obtain a new result regarding lipschitzian regularity of minimizers for the basic problem of the Calculus of Variations, and for the problems with higher order integrands.

Key Words. calculus of variations, optimal control, lipschitzian regularity of minimizers.

1991 Mathematics Subject Classification. Primary 49N60.

Índice

Introdução	1
I Parte de Síntese	5
1 O Problema Básico do Cálculo das Variações	7
1.1 Exposição do Problema	7
1.2 Breve resenha histórica	10
1.3 A condição necessária de Euler-Lagrange	11
1.3.1 Vários tipos de mínimo para $J[\cdot]$	11
1.3.2 Dedução da equação de Euler-Lagrange	12
1.3.3 A equação de Euler-Lagrange na forma integral	15
2 Existência	19
2.1 Observações sobre a existência	20
2.2 Teorema da Existência de Tonelli	24
2.3 Sobre a possibilidade de estender a classe das funções admissíveis	45
3 Regularidade	53
3.1 Observações sobre a regularidade	54
3.2 Resultados de Regularidade	69
3.2.1 Regularidade Lipschitziana	69
3.2.2 Regularidade C^1	73
3.2.3 Regularidade C^2	84
3.3 Fenómeno de Lavrentiev	87
II Parte Original	93
4 Abordagem Hamiltoniana à Regularidade	95
4.1 Um teorema de Regularidade Lipschitziana	95

4.2	Generalização do teorema de regularidade a problemas de ordem superior	111
4.3	Consignação	125
Conclusão		127
Apêndices		129
A	Resultados e noções auxiliares da Parte I	131
A.1	Complemento ao Capítulo 1	131
A.2	Complemento ao Capítulo 2	134
A.3	Complemento ao Capítulo 3	141
B	Resultados e noções auxiliares da Parte II	145
B.1	Exposição do Problema de Tempo Mínimo	145
B.2	Miscelânea	148
Referências Bibliográficas		151
Índice Remissivo		155

Introdução

Motivação da Dissertação

Leonida Tonelli foi o primeiro a descrever, em 1915, uma teoria de existência para o problema básico do Cálculo das Variações. Ele identificou o espaço das funções absolutamente contínuas como sendo a classe coerente na qual se pode (de um “modo razoável”) esperar existir um minimizante. Mas enquanto a teoria de Tonelli resolveu essencialmente a questão da existência, ela também gerou novas questões acerca da validade das condições necessárias tradicionais, exemplo das quais é a famosa equação de Euler-Lagrange. Tonelli conjecturou, enquanto Clarke e Vinter verificaram em [8], que certas ocorrências do problema básico do Cálculo das Variações, satisfazendo as hipóteses de existência de Tonelli, tinham minimizantes para os quais a equação de Euler-Lagrange não era verificada. Este facto salientou a diferença relevante entre as hipóteses dos teoremas da existência e os requisitos sob os quais as condições necessárias usuais são aplicáveis. O uso de um teorema da existência é, de um modo lógico, um prelúdio para invocar

condições necessárias. No entanto, podemos olhar para as condições necessárias como sendo elas mesmo o nosso objectivo. Esta perspectiva adequa-se, por razões históricas, bastante bem ao Cálculo das Variações, onde a ênfase foi colocada durante cerca de dois séculos nas condições necessárias. Para tal, é necessário garantir a existência de uma solução do problema, numa subclasse das funções absolutamente contínuas para a qual as condições necessárias são válidas. Um exemplo de uma tal subclasse é a das funções lipschitzianas: um minimizante que pertença a esta classe satisfaz a equação de Euler-Lagrange (Teorema 10).

A importância da regularidade lipschitziana dos minimizantes, é ainda reforçada por dois motivos:

- o primeiro é o de que sob certas condições, ela implica regularidade C^1 ou mesmo regularidade C^2 (vejam-se os Teoremas 40 e 48 respectivamente);
- o segundo é que ela exclui automaticamente o fenómeno de Lavrentiev

$$AC - Lip.^1$$

Já explicado o papel da “Regularidade Lipschitziana dos minimizantes no Cálculo das Variações”, resta clarificar o porquê do “Controlo Óptimo” no título deste trabalho. Os problemas de controlo óptimo, que segundo parece tiveram

¹ Num contexto geral, o termo *fenómeno de Lavrentiev* é usado para descrever o facto do valor do mínimo de um problema variacional aumentar estritamente quando a classe de funções admissíveis $W_{k,p}([a, b]; \mathbb{R}^n)$ é substituída por $W_{k,q}([a, b]; \mathbb{R}^n)$ com $1 \leq p < q \leq +\infty$ e $1 \leq k \leq p$. A ocorrência do fenómeno de Lavrentiev $AC - Lip$ levanta problemas à aplicação de métodos numéricos para averiguação dos minimizantes. É também relevante nas ciências dos materiais, onde parece estar ligada a fenómenos de fractura.

origem na literatura de engenharia dos anos quarenta e cinquenta, englobam o Cálculo das Variações. Inversamente, é também verdade que muitos dos problemas de controlo óptimo podem ser reescritos como problemas variacionais com restrições de desigualdade e igualdade (que são admitidas na teoria clássica). Embora haja quem pense que a teoria do controlo óptimo seja apenas a face moderna do Cálculo das Variações, é nossa convicção de que na verdade há como que uma mudança de paradigma, que prevalece em importância sobre o relacionamento matemático das duas. Esta mudança de ponto de vista, faz com que certo tipo de questões possam ser respondidas de uma forma mais natural num modelo, do que no outro. Vários exemplos disso podem ser encontrados em [32]. É precisamente o nosso propósito, mostrar a “melhor adequação” da teoria do controlo óptimo ao estudo da regularidade lipschitziana dos minimizantes.

Organização da Dissertação

O presente trabalho divide-se basicamente em quatro capítulos. No primeiro descrevemos o problema de optimização com que iremos trabalhar e damos uma breve revisão da condição necessária clássica - a equação de Euler-Lagrange.

O segundo capítulo aborda a questão da existência. Damos exemplos de motivação e apresentamos o Teorema de Tonelli.

O terceiro capítulo trata o assunto da regularidade. Damos exemplos, fazemos observações e apresentamos vários resultados. Concluimos com um proble-

ma de minimizante não regular, possuidor do fenómeno de Lavrentiev.

O último capítulo expõe a nossa abordagem ao assunto e consiste fundamentalmente dos Teoremas 51 e 53. A demonstração destes resultados baseiam-se na passagem prévia do problema básico do Cálculo das Variações a um problema de tempo óptimo, ao qual podemos aplicar o princípio do máximo de Pontryagin.

Em apêndices colocamos alguma informação necessária à compreensão do trabalho. No fim apresentamos as referências bibliográficas, que foram sendo citadas ao longo do texto e que serviram de fonte de conhecimentos e inspiração para a presente dissertação, assim como um índice remissivo de termos e notações que esperamos possa servir de ajuda na leitura deste trabalho.

Comentários Bibliográficos

As fontes usadas na Parte de Síntese foram essencialmente: [2], [6], [13], [16], [17] e [32] para o Capítulo 1; [4], [12], [16], [17], [21] e [33] para o Capítulo 2; [3], [4], [6], [12], [16], [17], [19], [21], [23], [24], [30] e [34] para o Capítulo 3.

Para a Parte Original contribuíram principalmente [1], [6], [7], [8], [9], [10], [11], [15], [26] e [29].

Os conhecimentos preambulares, que se revelaram necessários ao desenvolvimento desta dissertação e por conseguinte também importantes para a sua inteira compreensão, podem ser encontrados em [13], [14], [18], [20], [22], [25], [27] e [28].

Os Apêndices devem muito a estas obras.

Parte de Síntese

*“Inventar é maravilhoso; mas
aprender e valorizar o que
os outros descobriram, será
menos do que criar?”*

Goethe

(citado por Viktor Pekelis em *Conheça as suas potencialidades*, ed. Mir, 1988, p. 92)

Capítulo 1

O Problema Básico do Cálculo das Variações

O Cálculo das Variações é uma área da matemática com três séculos de idade, mas que continua a ser ainda fonte de questões em aberto. O problema com que iremos lidar, é denominado de problema básico do Cálculo das Variações.

1.1 Exposição do Problema

Definição 1 *O problema básico do Cálculo das Variações, consiste na escolha de uma função $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, pertencente a uma dada classe de funções \mathcal{X} , de modo a minimizar uma funcional integral $J[\cdot]$:*

$$J[x(\cdot)] = \int_a^b L(t, x(t), \dot{x}(t)) dt \rightarrow \min, \quad (P)$$

quando sujeita às condições de fronteira

$$x(a) = x_a \quad \text{e} \quad x(b) = x_b.$$

As funções em \mathcal{X} chamamos de *trajectórias* ou *curvas*. Uma trajectória da classe \mathcal{X} que satisfaça as condições de fronteira diz-se *admissível*. Procuramos a curva admissível $x(\cdot)$ tal que

$$J[x(\cdot)] \leq J[y(\cdot)]$$

para todas as trajectórias admissíveis $y(\cdot)$. Aqui,

$$a, b \in \mathbb{R} \text{ com } a < b, \quad x_a, x_b \in \mathbb{R}^n,$$

são dados; $\dot{x}(\cdot)$ representa a derivada $\frac{dx}{dt}$

$$\dot{x}(t) = \left(\frac{dx^1(t)}{dt}, \dots, \frac{dx^n(t)}{dt} \right);$$

enquanto o lagrangeano $L : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ representa uma função nos seus argumentos (t, x, v) . Quando nada for dito, supomo-lo da classe C^2 . Na situação do lagrangeano não depender explicitamente da variável independente t - tempo - dizemos que o problema (P) é autónomo. \square

Observação 2 Sem perda de generalidade, podemos considerar apenas problemas (P) com $a = 0$, $b = 1$, $x_a = 0$ e $x_b = 1 = (1, \dots, 1)$:

$$\begin{aligned} J[x(\cdot)] &= \int_0^1 L(t, x(t), \dot{x}(t)) dt \rightarrow \min \\ x(0) &= 0, \quad x(1) = 1. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Com efeito, seja

$$\begin{aligned} J[x(\cdot)] &= \int_a^b L(t, x(t), \dot{x}(t)) dt \rightarrow \min \\ x(a) &= x_a, \quad x(b) = x_b. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Fazendo $\tau = \frac{t-a}{b-a}$ e $z(\tau) = x(t(\tau)) - x_a - (x_b - x_a - 1)\tau$, temos

$$\begin{aligned} t &= (b-a)\tau + a \\ dt &= (b-a)d\tau \\ \dot{z}(\tau) &= \dot{x}(t(\tau))(b-a) - (x_b - x_a - 1) \\ t \in [a, b] &\Rightarrow \tau \in [0, 1] \\ z(0) &= 0, \quad z(1) = 1 \end{aligned}$$

e por conseguinte podemos escrever (1.2) na forma (1.1):

$$\begin{aligned} J[z(\cdot)] &= \int_0^1 F(\tau, z(\tau), \dot{z}(\tau)) d\tau \rightarrow \min \\ z(0) &= 0, \quad z(1) = 1, \end{aligned}$$

onde $F(\tau, z, \dot{z}) =$

$$= L\left((b-a)\tau + a, z + x_a + (x_b - x_a - 1)\tau, \frac{1}{b-a}(\dot{z} + x_b - x_a - 1)\right)(b-a).$$

Notar que se a função $x(\cdot)$ for membro da classe C^r , Lip ou AC no intervalo $[a, b]$, também $z(\cdot)$ o será no intervalo $[0, 1]$; e que $L(\cdot, \cdot, \cdot)$ e $F(\cdot, \cdot, \cdot)$ são semelhantes em termos de continuidade e diferenciabilidade. \square

1.2 Breve resenha histórica

O Cálculo das Variações nasceu em 1697 em Groningen, uma cidade universitária no norte da Holanda, quando Johann Bernoulli, professor de matemática na universidade local desde 1695 a 1705, publicou a solução do problema de braquistócrona. (Problema (P) com $n = 1$ e lagrangeano dado por $L(t, x, v) = \sqrt{\frac{1+v^2}{x-x_a}}$. O seu nome tem origem nas palavras gregas $\beta\rho\alpha\chi\iota\sigma\tau\omicron\varsigma$: mínimo e $\chi\rho\omicron\nu\omicron\varsigma$: tempo.) Um ano antes (em 1696) ele tinha desafiado os seus contemporâneos a resolver o problema. Para além da solução do próprio Johann Bernoulli, foram submetidas soluções por Newton, Leibniz, Tschirnhaus, l'Hôpital e Jakob Bernoulli (irmão de Johann Bernoulli). Depois destas soluções, e directamente ligados aos eventos de 1696-1697, registou-se um período de actividade intensa em problemas semelhantes. Do trabalho do matemático Leonhard Euler, que tinha sido um estudante do próprio Johann Bernoulli, e do matemático Joseph Louis Lagrange, que se tornou interessado nos problemas variacionais ao ler o trabalho de Euler, surgiu a denominada equação de Euler-Lagrange, a ser satisfeita por “qualquer minimizante” do integral variacional $J[\cdot]$. Na verdade, esta condição foi estabelecida em 1744 apenas por Euler. No entanto a maneira usada para a obter usava métodos heurísticos e considerando geométricos os quais, embora engenhosos, careciam de rigor matemático. A 12 de Agosto de 1755, Lagrange escreveu uma carta a Euler contendo detalhes de como obter a

equação de Euler por um processo puramente analítico e que seguia, no essencial, a linha de raciocínio que hoje usamos para a obter. Depois de ver este trabalho, Euler deixou de usar o seu próprio método, expondo o de Lagrange.

1.3 A condição necessária de Euler-Lagrange

1.3.1 Vários tipos de mínimo para $J[\cdot]$

Como dissemos na Definição 1, procuramos o mínimo global de $J[\cdot]$. No entanto, como as condições necessárias para mínimo local são automaticamente condições necessárias para mínimo global, é usual considerar a formulação das condições necessárias na sua forma mais geral, i.e., para mínimos locais. Para isso temos de especificar uma métrica que torne precisa a noção de vizinhança. No nosso contexto são usuais as seguintes métricas:

$$\rho_0(x(\cdot), y(\cdot)) = \sup_{t \in [a, b]} \{\|x(t) - y(t)\|\}$$

$$\rho_1(x(\cdot), y(\cdot)) = \sup_{t \in [a, b]} \{\|x(t) - y(t)\| + \|\dot{x}(t) - \dot{y}(t)\|\}.$$

Definição 3 Se existir uma trajectória admissível $x(\cdot)$ e um δ positivo tal que $J[x(\cdot)] \leq J[y(\cdot)]$ para toda a trajectória admissível $y(\cdot)$ a satisfazer

$$\rho_0(x(\cdot), y(\cdot)) < \delta,$$

dizemos que $x(\cdot)$ é um minimizante forte para (P) . De modo análogo, se

$J[x(\cdot)] \leq J[y(\cdot)]$ para toda a trajetória admissível $y(\cdot)$ a satisfazer

$$\rho_1(x(\cdot), y(\cdot)) < \delta,$$

dizemos que $x(\cdot)$ é um minimizante fraco. □

O mínimo global, o mínimo forte e o mínimo fraco comparam $x(\cdot)$ com funções $y(\cdot)$ em espaços sucessivamente mais pequenos. Por conseguinte, se $J[x(\cdot)]$ é um mínimo global para o nosso problema, então ele é necessariamente um mínimo forte; se $J[x(\cdot)]$ é um mínimo forte então é também um mínimo fraco. A condição necessária de Euler-Lagrange, que iremos estabelecer de seguida, é válida para minimizantes fracos (e portanto também para minimizantes fortes e globais).

1.3.2 Dedução da equação de Euler-Lagrange

Seja $x(\cdot)$ uma função contínua, duas vezes diferenciável e que minimiza (P) . Consideremos ainda qualquer função $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ de C^1 com valor nulo em a e b . Tais funções são chamadas de *variações*. Observe-se que

$$(x + \varepsilon h)(\cdot), \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}$$

é um elemento de C^1 satisfazendo as restrições de fronteira de (P) :

$$(x + \varepsilon h)(a) = x(a) \quad \text{e} \quad (x + \varepsilon h)(b) = x(b).$$

Uma vez que $x(\cdot)$ é solução de (P) , temos que

$$J[(x + \varepsilon h)(\cdot)] \geq J[x(\cdot)], \quad \forall h(\cdot) \in C^1.$$

Noutros termos, dado $h(\cdot)$ arbitrário, a função $g(\cdot)$ definida por

$$g(\varepsilon) = J[(x + \varepsilon h)(\cdot)] = \int_a^b L\left(t, x(t) + \varepsilon h(t), \dot{x}(t) + \varepsilon \dot{h}(t)\right) dt$$

admite um mínimo em $\varepsilon = 0$. Dado que $L(\cdot, \cdot, \cdot) \in C^2$, a função g é diferenciável¹

$$\dot{g}(\varepsilon) = \frac{dg(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \int_a^b \frac{d}{d\varepsilon} \left\{ L\left(t, x(t) + \varepsilon h(t), \dot{x}(t) + \varepsilon \dot{h}(t)\right) \right\} dt,$$

e $\dot{g}(0)$ deve ser zero. O cálculo dá

$$\dot{g}(0) = \frac{d}{d\varepsilon} J[(x + \varepsilon h)(\cdot)] \Big|_{\varepsilon=0} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_a^b \left\{ L_{x^i}(t, x(t), \dot{x}(t)) h^i(t) + L_{v^i}(t, x(t), \dot{x}(t)) \dot{h}^i(t) \right\} dt = 0, \quad i \in \{1, \dots, n\},$$

(1.3)

para todos os $h(\cdot) = (h^1(\cdot), \dots, h^n(\cdot)) \in C^1$ em $[a, b]$, e onde

$$L_{x^i}(t, x, v) = \frac{\partial L}{\partial x^i}(t, x, v),$$

$$L_{v^i}(t, x, v) = \frac{\partial L}{\partial v^i}(t, x, v).$$

A condição (1.3) é tudo menos prática. Vejamos como obter uma outra mais útil, eliminando qualquer referência às variações. Integremos o segundo termo

¹ Veja-se o Teorema 67 em Apêndice e as observações que se lhe seguem.

de (1.3) por partes. Tendo em mente que $h(a) = h(b) = 0$ obtemos

$$\int_a^b \left(L_{x^i}(t, x(t), \dot{x}(t)) - \frac{d}{dt} L_{v^i}(t, x(t), \dot{x}(t)) \right) h^i(t) dt = 0, \quad i \in \{1, \dots, n\}. \quad (1.4)$$

Notar que isto é obtido para qualquer variação $h(\cdot)$ e que a quantidade entre parêntesis não depende de $h(\cdot)$. É tentador, e vamos ver que correcto, concluir que esta quantidade é identicamente nula:

Lema 4 (Lema fundamental do Cálculo das Variações) *Se α e β ($\beta > \alpha$) são constantes fixas e $a(\cdot)$ é uma função contínua em $[\alpha, \beta]$ verificando*

$$\int_{\alpha}^{\beta} a(t) h(t) dt = 0, \quad \forall h(\cdot) \in C \text{ com } h(\alpha) = h(\beta) = 0, \quad (1.5)$$

concluímos que

$$a(t) = 0 \quad \forall t \in [\alpha, \beta]. \quad (1.6)$$

Prova: a demonstração resume-se a mostrar a existência de pelo menos uma função $h(\cdot)$ para a qual (1.5) é violada quando $a(\cdot)$ é tal que (1.6) não se verifica. Suponhamos portanto a não ocorrência de (1.6): existe um valor particular $t_0 \in]\alpha, \beta[$ no qual $a(t_0) \neq 0$. Sem perda de generalidade, consideremos $a(t_0) > 0$. Uma vez que $a(\cdot)$ é contínua, existe um intervalo em redor de t_0 - digamos $[t_0 - \varepsilon; t_0 + \varepsilon]$ - no qual $a(t) > 0$. Mas então (1.5) não pode ocorrer. Por exemplo, consideremos a função definida por

$$h(t) = \begin{cases} (t - (t_0 - \varepsilon))^2 (t - (t_0 + \varepsilon))^2 & \text{se } t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \\ 0 & \text{se } t \notin [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \end{cases}.$$

Para esta função em particular (que é contínua e verifica $h(\alpha) = h(\beta) = 0$) o integral em (1.5) toma o valor

$$\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} a(t) (t - (t_0 - \varepsilon))^2 (t - (t_0 + \varepsilon))^2 dt > 0$$

dado que $a(t) > 0$ para $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$. ■

De (1.4) e do Lema fundamental do Cálculo das Variações, vem que

$$\frac{d}{dt} L_{v^i}(t, x(t), \dot{x}(t)) = L_{x^i}(t, x(t), \dot{x}(t)), \quad i \in \{1, \dots, n\}. \quad (1.7)$$

Esta é a *equação de Euler-Lagrange* - uma condição necessária a ser satisfeita por minimizantes de $J[\cdot]$ que são da classe C^2 .

Definição 5 *As soluções da equação de Euler-Lagrange chamamos extremais.* □

1.3.3 A equação de Euler-Lagrange na forma integral

Durante mais de um século, foi prática comum considerar as funções admissíveis na classe C^2 , C^1 ou, quando muito, na classe PC^1 . No entanto, é desejável admitir a maior classe de funções para a qual a condição (1.7) faça sentido. Essa classe resulta ser a das funções lipschitzianas, mas para tal precisamos de um conceito de integral que não o de Riemann, como foi reconhecido por Weierstrass ao propor os seus integrais - os integrais de Weierstrass.² Em 1879, mais ou

² Actualmente, a interpretação do integral em (P) no sentido de Lebesgue é a prática corrente no Cálculo das Variações e será o sentido usado em todo este trabalho. Esta generalização do integral de Riemann, foi introduzida por Lebesgue em 1902. O seu uso sistemático (assim como o das trajectórias absolutamente contínuas) no Cálculo das Variações, começou com o trabalho de L. Tonelli, por volta de 1914. Estes conceitos vieram depois a tornar-se imprescindíveis com o desenvolvimento da teoria do Controlo Óptimo.

menos pela mesma altura, duBois-Reymond encontrou uma maneira de obter uma versão mais forte da equação de Euler-Lagrange.

Façamos $\mathcal{X} = Lip([a, b], \mathbb{R}^n)$, a classe das funções Lipschitzianas $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ que satisfazem a condição de Lipschitz

$$\|x(t_1) - x(t_2)\| \leq \lambda \cdot |t_1 - t_2| \quad \text{para todo } t_1, t_2 \in [a, b],$$

onde a constante λ depende de $x(\cdot)$. Consideremos o argumento usado na obtenção da equação de Euler até ao ponto onde obtivemos (1.3). Em vez de procedermos com a integração por partes do segundo termo, escolhamos o primeiro.³ O resultado é

$$\int_a^b L_{x^i}(t, x(t), \dot{x}(t)) h^i(t) dt = - \int_a^b \left[\int_a^t L_{x^i}(\tau, x(\tau), \dot{x}(\tau)) d\tau \right] \dot{h}^i(t) dt,$$

para $i \in \{1, \dots, n\}$ e para todo o $h(\cdot) = (h^1(\cdot), \dots, h^n(\cdot)) \in C^1([a, b], \mathbb{R}^n)$.

Por conseguinte podemos escrever (1.3) na seguinte forma equivalente:

$$\int_a^b \left[L_{x^i}(t, x(t), \dot{x}(t)) - \int_a^t L_{x^i}(\tau, x(\tau), \dot{x}(\tau)) d\tau \right] \dot{h}^i(t) dt = 0. \quad (1.8)$$

Uma vez que $h(\cdot)$ é qualquer variação, com $h(a) = h(b) = 0$, podemos ser tentados a concluir que a quantidade entre parêntesis rectos é nula. O lema seguinte esclarece que isso não é bem assim - a conclusão correcta é que essa quantidade é constante.

³ A fórmula de integração por partes continua válida para o integral de Lebesgue, como se prova, por exemplo, em [14, Teorema 5.3.3.1, p. 115].

Lema 6 (Lema de duBois-Reymond) *Se α e β ($\beta > \alpha$) são constantes fixas e $b(\cdot)$ é uma função contínua em $[\alpha, \beta]$ verificando*

$$\int_{\alpha}^{\beta} b(t) \dot{h}(t) dt = 0, \quad \forall h(\cdot) \in C^1 \text{ com } h(\alpha) = h(\beta) = 0, \quad (1.9)$$

então

$$b(t) \equiv \text{constante em } [\alpha, \beta].$$

Prova: seja

$$k = \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} b(t) dt.$$

Temos então que

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} (k - b(t)) dt &= \int_{\alpha}^{\beta} k dt - \int_{\alpha}^{\beta} b(t) dt = \\ &= k(\beta - \alpha) - \int_{\alpha}^{\beta} b(t) dt = 0. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Se escolhermos

$$h(t) = \int_{\alpha}^t (k - b(x)) dx,$$

vemos que $h(\cdot) \in C^1([\alpha, \beta])$ e, em virtude de (1.10), $h(\alpha) = h(\beta) = 0$. Se admitirmos a hipótese (1.9), com este $h(\cdot)$ particular temos

$$\int_{\alpha}^{\beta} b(t) \dot{h}(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} b(t) (k - b(t)) dt = 0. \quad (1.11)$$

Multiplicando (1.10) por k e subtraindo o resultado por (1.11) obtemos:

$$k \int_{\alpha}^{\beta} (k - b(t)) dt - \int_{\alpha}^{\beta} b(t) (k - b(t)) dt = 0 \Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta} (k - b(t))^2 dt = 0.$$

Uma vez que $(k - b(t))^2 \geq 0$, segue-se que $b(t) = k$ para todo o $t \in [\alpha, \beta]$. ■

Do Lema de duBois-Reymond e de (1.8), concluímos que para qualquer solução $x(\cdot) \in Lip$ de (P), existe um vector constante $c = (c^1, \dots, c^n) \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$L_{v^i}(t, x(t), \dot{x}(t)) = c^i + \int_a^t L_{x^i}(\tau, x(\tau), \dot{x}(\tau)) d\tau, \quad i \in \{1, \dots, n\} \quad (1.12)$$

é verdade para quase todos os $t \in [a, b]$.

Definição 7 Designamos as equações (1.12) por equações de Euler-Lagrange na forma integral. \square

Definição 8 As soluções da equação de Euler-Lagrange na forma integral chamamos extremais de duBois-Reymond. \square

Observação 9 Como veremos com os exemplos apresentados em §3.1, uma extremal de duBois-Reymond não necessita ser da classe C^2 . Este facto vai-nos levar a estabelecer uma condição de regularidade, garante de que as extremais de duBois-Reymond do problema (P) sejam de facto da classe C^2 (Teorema 48) e por conseguinte soluções das equações de Euler-Lagrange. \square

Teorema 10 Qualquer extremal de duBois-Reymond $x(\cdot)$ satisfaz, em q.t.p. $t \in [a, b]$, as equações de Euler-Lagrange⁴

$$\frac{d}{dt} L_{v^i}(t, x(t), \dot{x}(t)) = L_{x^i}(t, x(t), \dot{x}(t)), \quad i \in \{1, \dots, n\}. \quad (1.13)$$

Prova: uma vez que $L_x(t, x, v)$ é uma função contínua nas $2n + 1$ variáveis $(t, x, v) \in [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, inferimos que $L_x(\cdot, x(\cdot), \dot{x}(\cdot))$ é uma função mensurável, limitada em $[a, b]$. Por conseguinte, o lado direito de (1.12) é uma função absolutamente contínua em $t \in [a, b]$ (vide Teorema 65 em Apêndice), diferenciável em quase todos os pontos. A derivação dá-nos a equação de Euler-Lagrange. \blacksquare

⁴ Notar que em geral não nos é permitido escrever o lado esquerdo de (1.13) na forma

$$\frac{d}{dt} L_v(t, x(t), \dot{x}(t)) = L_{vt}(t, x(t), \dot{x}(t)) + L_{vx}(t, x(t), \dot{x}(t)) \dot{x}(t) + L_{vv}(t, x(t), \dot{x}(t)) \ddot{x}(t).$$

Capítulo 2

Existência

A formulação da condição necessária de Euler-Lagrange no Capítulo 1, é dada para um minimizante já existente. No entanto, mesmo problemas com lagrangeanos bastante simples (e.g. polinomiais), podem não admitir soluções.

Começamos em §2.1 por ilustrar, com exemplos, o género de dificuldades que surgem na tentativa de obter resultados de existência. Veremos que os integrais variacionais, mesmo que sejam limitados inferiormente, não possuem necessariamente minimizantes da classe C^1 ou de qualquer outra classe “razoável” (*vide* Exemplo 11). Efectivamente, não é à prior claro quando C^1 , ou qualquer outro espaço de funções como a das funções Lipschitzianas, é o espaço natural a considerar (*vide* Exemplos 12 e 13).

Consideramos de seguida a procura de soluções óptimas numa classe de funções absolutamente contínuas. O uso sistemático desta classe no Cálculo das Variações, começou por volta de 1914 com o trabalho de Leonida Tonelli - *vide* [33]. Para estas funções, e desde que o lagrangeano $L(\cdot, \cdot, \cdot)$ goze de certas pro-

priedades, provamos em §2.2 o resultado de Tonelli (ligeiramente generalizado) sobre a existência de mínimo. As peculiaridades do Teorema aqui apresentado, em relação à versão “standard”, são:

- em primeiro lugar, supomos que as funções $x(\cdot)$ não podem variar de $-\infty$ a $+\infty$, devendo tomar valores num espaço fechado. Esta generalização foi prevista pelo próprio Tonelli a quando da demonstração do seu teorema - *vide* [33, p. 264];
- em segundo lugar, o teorema decorre para uma classe, à frente designada por AC_φ , contida na classe AC (*vide* Observação 16). Este facto decorre da prova sugerida por Lavrentiev em [21] e que aqui foi adoptada.

Por último abordamos a questão de saber se podemos considerar como funções admissíveis todas as curvas contínuas de variação limitada. Demonstramos em §2.3 que esta questão se responde de uma forma negativa. Deste modo, de entre as curvas contínuas, a classe natural para as funções admissíveis é a que consta no Teorema de Tonelli.

Em todo o capítulo consideramos (sem grande perda de generalidade) problemas (P) com $n = 1$.

2.1 Observações sobre a existência

Vamos ver que (P) pode não ter qualquer solução, mesmo se alargarmos

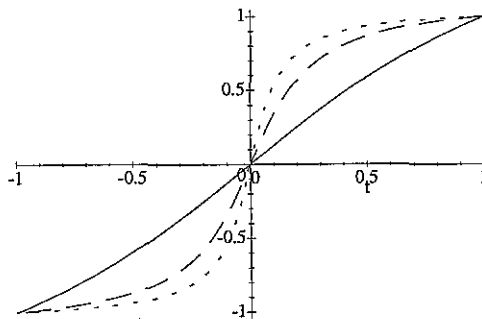


Figura 2.1 $\tilde{x}_\varepsilon(t) = \frac{\arctan(\frac{t}{\varepsilon})}{\arctan(\frac{1}{\varepsilon})}$, $\varepsilon = 1, 0.2, 0.1$.

consideravelmente a classe de funções admissíveis substituindo C^2 ou C^1 por PC^1 ou a classe das funções Lipschitzianas.

Exemplo 11 (Exemplo de Weierstrass) *A existência de infimo finito num problema variacional, não garante de um modo geral a existência de mínimo. Consideremos*

$$J[x(\cdot)] = \int_{-1}^1 t^2 \dot{x}^2(t) dt,$$

que deverá ser minimizado na classe

$$\mathcal{X} = C^1([-1, 1]),$$

satisfazendo as condições de fronteira

$$x(-1) = -1, \quad x(1) = 1.$$

Claramente temos que

$$\inf_{x(\cdot) \in \mathcal{X}} J[x(\cdot)] \geq 0,$$

e inserindo a função $\tilde{x}_\varepsilon(\cdot) \in \mathcal{X}$, definida por

$$\tilde{x}_\varepsilon(t) = \frac{\arctan\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)}{\arctan\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}, \quad |t| \leq 1, \quad \varepsilon > 0,$$

obtemos que $J[\tilde{x}_\varepsilon(\cdot)] \rightarrow 0$ à medida que $\varepsilon \rightarrow 0^+$.

$$J[\tilde{x}_\varepsilon(\cdot)] = \int_{-1}^1 t^2 \dot{\tilde{x}}_\varepsilon^2(t) dt$$

$$\tilde{x}_\varepsilon(t) = \frac{\arctan\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)}{\arctan\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}$$

$$\dot{\tilde{x}}_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon \arctan\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \left(1 + \left(\frac{t}{\varepsilon}\right)^2\right)}$$

$$\begin{aligned} J[\tilde{x}_\varepsilon(\cdot)] &= \frac{1}{\varepsilon^2 \arctan^2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} \int_{-1}^1 \left(\frac{t}{1 + \left(\frac{t}{\varepsilon}\right)^2}\right)^2 dt = \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon^3 \frac{1}{\varepsilon^2 \arctan^2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} \left[\arctan\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) - \frac{\varepsilon t}{\varepsilon^2 + t^2} \right]_{-1}^1 = \\ &= \frac{\varepsilon}{2 \arctan^2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} \left(\arctan \frac{1}{\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon^2} - \arctan\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right) - \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon^2} \right) = \\ &= \frac{\varepsilon \left(\arctan \frac{1}{\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon^2} \right)}{\arctan^2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}. \end{aligned}$$

Temos então que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J[\tilde{x}_\varepsilon(\cdot)] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon \left(\arctan \frac{1}{\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon^2} \right)}{\arctan^2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} = 0.$$

Por conseguinte temos que

$$\inf_{x(\cdot) \in \mathcal{X}} J[x(\cdot)] = 0.$$

Contudo, não existe nenhuma função $x(\cdot) \in \mathcal{X}$ tal que $J[x(\cdot)] = 0$ uma vez que esta relação implicaria que $\dot{x}(t) \equiv 0$, i.e., $x(t) \equiv \text{const}$, e isto é impossível por causa das condições de fronteira. \square

Exemplo 12 Suponhamos que queremos minimizar

$$J[x(\cdot)] = \int_0^1 \left(1 + |\dot{x}(t)|^2\right)^{1/4} dt$$

na classe \mathcal{X} das funções Lipschitzianas $x : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, satisfazendo $x(0) = 0$ e $x(1) = 1$. Considerando

$$\tilde{x}_\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } 0 \leq t \leq 1 - \delta \\ 1 + \delta^{-1}(t - 1) & \text{para } 1 - \delta \leq t \leq 1 \end{cases}, \quad \delta > 0,$$

obtemos

$$\begin{aligned} J[\tilde{x}_\delta(\cdot)] &= \int_0^{1-\delta} dt + \int_{1-\delta}^1 (1 + \delta^{-2})^{1/4} dt = \\ &= (1 - \delta) + \delta^{1/2} (1 + \delta^2)^{1/4}. \end{aligned}$$

Portanto $J[\tilde{x}_\delta(\cdot)] \rightarrow 1$ à medida que $\delta \rightarrow 0$, de onde

$$\inf_{x(\cdot) \in \mathcal{X}} J[x(\cdot)] = 1.$$

Obviamente não existe nenhum elemento $x(\cdot)$ de \mathcal{X} tal que $J[x(\cdot)] = 1$ uma vez que isso implicaria $\dot{x}(\cdot) \equiv 0$ e $x(\cdot) \equiv \text{const.}$ \square

Exemplo 13 Consideremos a funcional

$$J[x(\cdot)] = \int_0^1 \frac{1}{1 + |\dot{x}(t)|^2} dt$$

na classe $\mathcal{X} = C^1([0, 1])$ e com condições de fronteira $x(0) = 0$, $x(1) = 1$. Resulta claro que $0 < J[x(\cdot)] < 1$, e vamos ver que o

$$\inf_{x(\cdot) \in \mathcal{X}} J[x(\cdot)] = 0 \quad \text{e} \quad \sup_{x(\cdot) \in \mathcal{X}} J[x(\cdot)] = 1.$$

Na verdade podemos encontrar $x_i(\cdot)$, $x_s(\cdot) \in \mathcal{X}$ tal que $J[x_i(\cdot)] < \varepsilon$ e $1 - \varepsilon < J[x_s(\cdot)]$, onde ε é um número positivo prescrito arbitrariamente. Seja

$$x_{i\delta}(t) = \frac{t^2}{2\delta} + \left(\frac{2\delta - 1}{2\delta} \right) t, \quad (\delta > 0).$$

Temos $x_{i\delta}(0) = 0$, $x_{i\delta}(1) = 1$,

$$\dot{x}_{i\delta}(t) = \frac{2t + 2\delta - 1}{2\delta},$$

e

$$\begin{aligned} J[x_{i\delta}(\cdot)] &= \delta \int_0^1 \frac{\frac{1}{\delta}}{1 + \left| \frac{2t + 2\delta - 1}{2\delta} \right|^2} dt = \\ &= \delta \left[\arctan \left(\frac{2t + 2\delta - 1}{2\delta} \right) \right]_0^1 = \\ &= \delta \left(\arctan \left(\frac{1 + 2\delta}{2\delta} \right) + \arctan \left(\frac{1 - 2\delta}{2\delta} \right) \right). \end{aligned}$$

Segue-se então que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} J[x_{i\delta}(\cdot)] = 0.$$

Façamos agora

$$x_{s\delta}(t) = \frac{\ln\left(1 + \frac{t}{\delta}\right)}{\ln\left(1 + \frac{1}{\delta}\right)}.$$

Temos

$$x_{s\delta}(0) = 0, \quad x_{s\delta}(1) = 1,$$

$$\dot{x}_{s\delta}(t) = \frac{1}{(t + \delta) \ln\left(1 + \frac{1}{\delta}\right)}$$

$$\begin{aligned} J[x_{s\delta}(\cdot)] &= \int_0^1 \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{(t+\delta) \ln\left(1 + \frac{1}{\delta}\right)}\right)^2} dt = \\ &= \int_0^1 \frac{(t + \delta)^2 \ln^2\left(1 + \frac{1}{\delta}\right)}{1 + (t + \delta)^2 \ln^2\left(1 + \frac{1}{\delta}\right)} dt = \\ &= 1 - \frac{1}{\ln\left(1 + \frac{1}{\delta}\right)} \int_0^1 \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{\delta}\right)}{1 + (t + \delta) \ln\left(1 + \frac{1}{\delta}\right)} dt = \\ &= 1 - \frac{1}{\ln\left(1 + \frac{1}{\delta}\right)} \left[\arctan\left((t + \delta) \ln\left(1 + \frac{1}{\delta}\right)\right) \right]_0^1 = \\ &= 1 - \frac{1}{\ln\left(1 + \frac{1}{\delta}\right)} \left(\arctan\left((1 + \delta) \ln\left(1 + \frac{1}{\delta}\right)\right) - \arctan\left(\delta \ln\left(1 + \frac{1}{\delta}\right)\right) \right), \end{aligned}$$

de onde vem que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} J[x_{s\delta}(\cdot)] = 1.$$

Contudo, nem o ínfimo nem o supremo, podem ser igualados por $J[\tilde{x}(\cdot)]$ para algum $\tilde{x}(\cdot) \in \mathcal{X}$. \square

2.2 Teorema da Existência de Tonelli

Estudamos a questão, de quais as hipóteses sob as quais existe uma função $x(\cdot)$ minimizante do integral

$$\int_0^1 L(t, x(t), \dot{x}(t)) dt, \quad (2.1)$$

Aqui, as funções admissíveis $x(\cdot)$ tomarão valores inteiramente no quadrado \mathcal{Q} , definido pelos pontos $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$, $(1, 0)$, e satisfarão, sem perda de generalidade (*vide* Observação 2), as condições de fronteira

$$x(0) = 0, \quad x(1) = 1.$$

Para simplificar a exposição, vamos fazer algumas definições:

Definição 14 *Seja $\varphi(\cdot)$ uma função contínua definida para $t \geq 0$ e tal que $\varphi(0) = 0$ e $\varphi(t) > 0$ para $t > 0$. Dizemos que a função $x : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ pertence:*

- à classe C_φ quando

$$\forall t, t+h \in [0, 1], \quad |x(t+h) - x(t)| \leq \varphi(|h|);$$

- à classe AC_φ quando, qualquer que seja a família finita de intervalos sem pontos comuns em $[0, 1]$,

$$[a_i, b_i], \quad i = 1, \dots, n,$$

se tem

$$\sum_{i=1}^n |x(b_i) - x(a_i)| \leq \varphi \left(\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) \right). \quad (2.2)$$

□

Observação 15 *Se $x(\cdot) \in C_\varphi$ então $x(\cdot)$ é contínua ($x(\cdot) \in C$). Com efeito, o facto de $x(\cdot)$ pertencer a C_φ , faz com que para todo o $0 \leq t_0 \leq 1$, se tenha*

$$|x(t_0+h) - x(t_0)| \leq \varphi(|h|).$$

Fazendo $t = t_0 + h$, e reescrevendo a desigualdade acima, obtemos:

$$|x(t) - x(t_0)| \leq \varphi(|t - t_0|). \quad (2.3)$$

Seja $\varepsilon > 0$ arbitrário, da definição de $\varphi(\cdot)$ (continuidade em zero) decorre que existe $\delta > 0$, tal que

$$||h| - 0| < \delta \Rightarrow |\varphi(|h|) - \varphi(0)| < \varepsilon.$$

Da não negatividade de $\varphi(\cdot)$, e do facto de $\varphi(0) = 0$, vem que

$$|h| < \delta \Rightarrow \varphi(|h|) < \varepsilon \Leftrightarrow |t - t_0| < \delta \Rightarrow \varphi(|t - t_0|) < \varepsilon. \quad (2.4)$$

De (2.3) e (2.4) decorre o pretendido:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |t - t_0| < \delta \Rightarrow |x(t) - x(t_0)| < \varepsilon.$$

□

Observação 16 Se $x(\cdot) \in AC_\varphi$ então $x(\cdot)$ é absolutamente contínua ($x(\cdot) \in AC$). Senão vejamos: se $x(\cdot) \in AC_\varphi$, então, para toda a família finita de intervalos $[a_i, b_i]$ em $[0, 1]$, $i = 1, \dots, n$, sem pontos comuns, temos que

$$\sum_{i=1}^n |x(b_i) - x(a_i)| \leq \varphi\left(\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)\right). \quad (2.5)$$

Da definição de $\varphi(\cdot)$, decorre que para todo o $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^n (b_i - a_i) - 0 \right| < \delta &\Rightarrow \left| \varphi\left(\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)\right) - \varphi(0) \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta \Rightarrow \varphi\left(\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)\right) < \varepsilon. \end{aligned} \quad (2.6)$$

De (2.5) e (2.6) resulta que $x(\cdot) \in AC$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta \Rightarrow \sum_{i=1}^n |x(b_i) - x(a_i)| < \varepsilon.$$

□

O seguinte resultado mostra que a classe C_φ pode ser parametrizada de um modo efectivo.

Teorema 17 (Lema de M. A. Lavrentiev, [21]) Sendo dada uma classe C_φ de curvas contínuas, podemos construir uma função contínua $\Psi(\cdot, \cdot)$ de duas variáveis (t, α) possuidora das seguintes propriedades:

1. Conseguimos obter todas as funções da classe dada atribuindo a α todos os valores numéricos possíveis - $0 \leq \alpha \leq 1$;
2. Qualquer que seja o número α_0 , $0 \leq \alpha_0 \leq 1$, a função $\Psi(\cdot, \alpha_0)$ pertence à classe dada.

Prova: Seja

$$\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n, \dots \quad (2.7)$$

uma sucessão de números positivos tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \eta_n = 0.$$

Consideremos, estabelecendo que $\varepsilon_n = \varphi(\eta_n)$ (com $\varphi(\cdot)$ a função que figura na definição da classe C_φ), uma nova sucessão de números positivos com $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n =$

0. Supomos que a sucessão (2.7) seja tal que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n$ converge.

Da definição de C_φ , qualquer que seja a função $x(\cdot)$ da classe considerada temos que:

1. $0 \leq x(t) \leq 1$;
2. $|x(t+h) - x(t)| \leq \varepsilon_n$ para todo o h , $|h| = \eta_n$.

Consideremos agora os pontos $P_{n,k}$ de coordenadas

$$(n\eta_p, k\varepsilon_p), \quad n = 0, 1, \dots, \left[\frac{1}{\eta_p}\right] + 1, \quad k = 0, 1, \dots, \left[\frac{1}{\varepsilon_p}\right],$$

onde p é um inteiro positivo fixo. Construamos, dentro do quadrado \mathcal{Q} , todas as linhas poligonais possíveis com vértices nos pontos $P_{n,k}$ e tais que se um dos

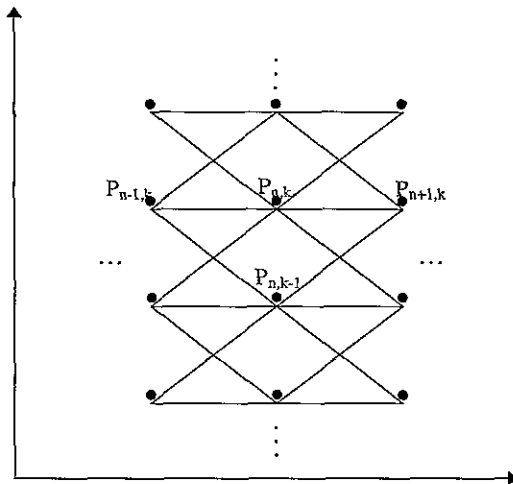


Figura 2.2 Linhas poligonais

vértices está no ponto $P_{n,k}$, os vértices vizinhos são necessariamente os pontos $P_{n-1,i}$ e $P_{n+1,j}$ com $i, j \in \{k-1, k, k+1\}$ (vide Fig. 2.2). Para um p fixo não existe mais do que um número finito destas linhas poligonais. Sejam

$$\pi_1(t, p), \pi_2(t, p), \dots, \pi_{N_p}(t, p)$$

todas as funções definidas em $[0, 1]$ à custa dessas linhas.

Posto isto, consideremos de entre $\pi_1(\cdot, 1), \pi_2(\cdot, 1), \dots, \pi_{N_1}(\cdot, 1)$, as funções que verificam a desigualdade:

$$\exists x(\cdot) \in C_\varphi : |\pi_i(t, 1) - x(t)| \leq 2\varepsilon_1 \quad \forall t \in [0, 1].$$

Sejam¹

$$\bar{\pi}_1(\cdot, 1), \bar{\pi}_2(\cdot, 1), \dots, \bar{\pi}_{\bar{N}_1}(\cdot, 1)$$

¹ Pressupomos $\bar{N}_1 \geq 2$. Se tal não for o caso, temos de escolher outra sucessão η_n .

todas essas funções (*vide* Fig. 2.3 onde ilustramos o caso de $\varphi(t) = t$. Neste caso as funções C_φ estão todas dentro do paralelogramo representado a traço mais grosso.).

Seja $P_1(t, \alpha)$ uma função contínua definida para $0 \leq t, \alpha \leq 1$ da maneira que se segue² :

$$\begin{aligned} P_1(t, \alpha) &= \left(1 - (\bar{N}_1 - 1) \left(\alpha - \frac{k}{\bar{N}_1 - 1}\right)\right) \bar{\pi}_{k+1}(t, 1) + \\ &\quad + (\bar{N}_1 - 1) \left(\alpha - \frac{k}{\bar{N}_1 - 1}\right) \bar{\pi}_{k+2}(t, 1), \\ \frac{k}{\bar{N}_1 - 1} &\leq \alpha \leq \frac{k+1}{\bar{N}_1 - 1}, \quad k = 0, \dots, \bar{N}_1 - 2. \end{aligned}$$

Segue-se da definição de $P_1(\cdot, \cdot)$ que existe, qualquer que seja a função $x(\cdot)$ da classe C_φ , um número α_0 , $0 \leq \alpha_0 \leq 1$, tal que

$$|x(t) - P_1(t, \alpha_0)| \leq 2\varepsilon_1.$$

Além disso, qualquer que seja o número β_0 , $0 \leq \beta_0 \leq 1$, existe sempre uma função $x(\cdot)$ da classe C_φ tal que

$$|P_1(t, \beta_0) - x(t)| \leq 2\varepsilon_1.$$

Suponhamos que podemos construir uma função contínua $P_n(\cdot, \cdot)$ com as propriedades seguintes:

² Reparar que

$$P_1\left(t, \frac{k}{\bar{N}_1 - 1}\right) = \bar{\pi}_{k+1}(t, 1), \quad k = 0, 1, \dots, \bar{N}_1 - 1.$$

Para outros valores de α ($\frac{k}{\bar{N}_1 - 1} < \alpha < \frac{k+1}{\bar{N}_1 - 1}$), $P_1(t, \alpha)$ é obtida por combinação linear convexa das funções $\bar{\pi}_{k+1}(t, 1)$ e $\bar{\pi}_{k+2}(t, 1)$.

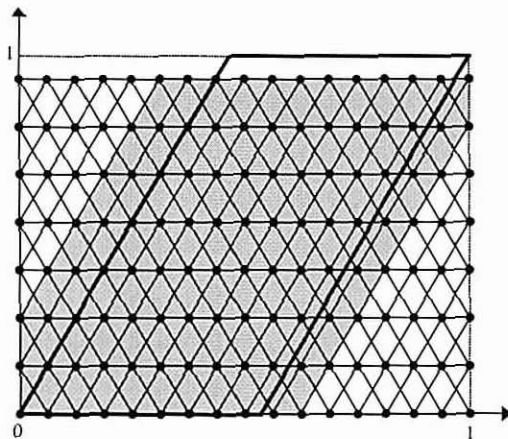


Figura 2.3 Ilustração (a sombreado) dos polígonos que participam na definição das funções $\tilde{\pi}_i(\cdot, 1)$.

1. para toda a função $x(\cdot)$ da classe considerada, existe sempre um número α_0 tal que $|P_n(t, \alpha_0) - x(t)| \leq 2\varepsilon_n$;
2. qualquer que seja o número $\bar{\alpha}_0$, $0 \leq \bar{\alpha}_0 \leq 1$, existe uma função $x(\cdot)$ da classe C_φ tal que $|P_n(t, \bar{\alpha}_0) - x(t)| \leq 2\varepsilon_n$.

Vamos demonstrar que neste caso é sempre possível construir uma função contínua $P_{n+1}(\cdot, \cdot)$ tal que:

1. qualquer que seja a função $x(\cdot)$ da classe C_φ , existe sempre um número β_0 , $0 \leq \beta_0 \leq 1$, tal que $|P_{n+1}(t, \beta_0) - x(t)| \leq 2\varepsilon_{n+1}$;
2. qualquer que seja o número $\bar{\beta}_0$, $0 \leq \bar{\beta}_0 \leq 1$, existe uma função $x(\cdot)$ da classe C_φ tal que $|P_{n+1}(t, \bar{\beta}_0) - x(t)| \leq 2\varepsilon_{n+1}$;
3. $|P_n(t, \alpha) - P_{n+1}(t, \alpha)| \leq 4\varepsilon_n + 2\varepsilon_{n+1}$.

Com efeito, seja $\beta > 0$ uma quantidade, tal que $\frac{1}{\beta}$ seja um inteiro e para o qual tenhamos

$$|P_n(t, \alpha + h) - P_n(t, \alpha)| \leq \varepsilon_n, \quad |h| \leq \beta, \quad t \in [0, 1]. \quad (2.8)$$

Posto isto, consideremos aquelas funções $\pi(\cdot, \cdot)$ de entre

$$\pi_1(t, n+1), \dots, \pi_{N_{n+1}}(t, n+1),$$

que verificam a desigualdade

$$\exists x(\cdot) \in C_\varphi : |\pi(t, n+1) - x(t)| \leq 2\varepsilon_{n+1} \quad \forall t \in [0, 1]. \quad (2.9)$$

Denotemo-las por

$$\bar{\pi}_1(t, n+1), \dots, \bar{\pi}_{N_{n+1}}(t, n+1).$$

Vamos ver que das propriedades da função $P_n(\cdot, \cdot)$ e do modo de construção das funções $\bar{\pi}(t, n+1)$ existe, para qualquer $\bar{\pi}_i(t, n+1)$, um inteiro $j < \frac{1}{\beta}$ tal que

$$|P_n(t, j\beta) - \bar{\pi}_i(t, n+1)| \leq 3\varepsilon_n + 2\varepsilon_{n+1}. \quad (2.10)$$

De facto, para a função $\bar{x}(\cdot)$ que satisfaz (2.9),

$$\begin{aligned} |P_n(t, j\beta) - \bar{\pi}_i(t, n+1)| &= |(P_n(t, j\beta) - \bar{x}(t)) + (\bar{x}(t) - \bar{\pi}_i(t, n+1))| \leq \\ &\leq |P_n(t, j\beta) - \bar{x}(t)| + 2\varepsilon_{n+1}. \end{aligned}$$

Pela propriedade 1 da função $P_n(\cdot, \cdot)$, $\exists \alpha_0 \in [0, 1] : |P_n(t, \alpha_0) - \bar{x}(t)| \leq 2\varepsilon_n$.

Temos então que

$$|P_n(t, j\beta) - \bar{\pi}_i(t, n+1)| \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq |(P_n(t, \alpha_0) - \bar{x}(t)) + (P_n(t, j\beta) - P_n(t, \alpha_0))| + 2\varepsilon_{n+1} \leq \\ &\leq 2\varepsilon_n + |P_n(t, j\beta) - P_n(t, \alpha_0)| + 2\varepsilon_{n+1}. \end{aligned}$$

Dado (2.8), basta escolher j a satisfazer $|j\beta - \alpha_0| \leq \beta$, para que a desigualdade (2.10) seja verificada. Diremos então que $\bar{\pi}_i(t, n+1)$ pertence à classe j . Cada uma das funções $\bar{\pi}(t, n+1)$ pertence desta maneira a uma classe j , $0 \leq j < \frac{1}{\beta}$. Inversamente, qualquer que seja o número j , $0 \leq j < \frac{1}{\beta}$, existem funções $\bar{\pi}(t, n+1)$ da classe j : fixamos $\alpha_0 = j\beta$ e para $x(\cdot)$ da propriedade 2 de $P_n(\cdot, \cdot)$ temos

$$\begin{aligned} |P_n(t, \alpha_0) - \bar{\pi}(t, n+1)| &= |(P_n(t, j\beta) - x(t)) - (\bar{\pi}(t, n+1) - x(t))| \leq \\ &\leq 2\varepsilon_n + |\bar{\pi}(t, n+1) - x(t)|. \end{aligned}$$

Todos os $\bar{\pi}(t, n+1)$ que verificam ($x(\cdot)$ está fixo)

$$|\bar{\pi}(t, n+1) - x(t)| \leq \varepsilon_n + 2\varepsilon_{n+1}$$

pertencem à classe j . Sejam

$$\bar{\pi}_{j_1}(t, n+1), \bar{\pi}_{j_2}(t, n+1), \dots, \bar{\pi}_{j_{\mu_j}}(t, n+1)$$

todas essas funções.

Passamos agora à construção da função procurada $P_{n+1}(t, \alpha)$. Para esse fim, dividimos o segmento $[j\beta, (j+1)\beta]$ em μ_j partes iguais e denotamos por

$$\alpha_1^j = j\beta, \alpha_2^j, \dots, \alpha_{\mu_j}^j.$$

as extremidades esquerdas de cada uma dessas partes. Fazemos-

$$P_{n+1}(t, \alpha) = \left(1 - \frac{1}{a_{k+1}^j - a_k^j} (\alpha - a_k^j)\right) \bar{\pi}_{j_k}(t, n+1) + \\ + \frac{1}{a_{k+1}^j - a_k^j} (\alpha - a_k^j) \bar{\pi}_{j_{k+1}}(t, n+1), \\ a_k^j \leq \alpha \leq a_{k+1}^j, \quad k = 1, \dots, \mu_j - 1, \quad j = 0, 1, \dots, \frac{1}{\beta} - 1;$$

e para $j = \frac{1}{\beta} - 1$,

$$P_{n+1}(t, \alpha) = \bar{\pi}_{j\mu_j}(t, n+1), \quad a_{\mu_j}^j \leq \alpha \leq 1.$$

Notar que

$$|P_n(t, \alpha) - P_{n+1}(t, \alpha)| = \\ = |(P_n(t, \alpha) - P_n(t, j\beta)) - (P_{n+1}(t, \alpha) - P_n(t, j\beta))|,$$

onde consideramos $|\alpha - j\beta| \leq \beta$, e que temos então por (2.8) que

$$|P_n(t, \alpha) - P_{n+1}(t, \alpha)| \leq \varepsilon_n + |P_{n+1}(t, \alpha) - P_n(t, j\beta)|.$$

De (2.10) e da definição de $P_{n+1}(\cdot, \cdot)$ resultam as três condições enunciadas.

Construímos desta maneira, de acordo com a função $P_1(\cdot, \cdot)$, uma sucessão de funções

$$P_1(\cdot, \cdot), P_2(\cdot, \cdot), \dots, P_n(\cdot, \cdot), \dots \quad (2.11)$$

com as seguintes propriedades:

1. qualquer que seja a função $x(\cdot)$ da classe considerada, C_φ , e qualquer que seja o número inteiro n , existe um número α_0 , $0 \leq \alpha_0 \leq 1$, tal que $|P_n(t, \alpha_0) - x(t)| \leq 2\varepsilon_n$;

2. qualquer que seja o número β_0 , $0 \leq \beta_0 \leq 1$, e qualquer que seja o número inteiro m , existe sempre uma função $x(\cdot)$ da classe considerada, C_φ , tal que $|P_m(t, \beta_0) - x(t)| \leq 2\varepsilon_m$;
3. $|P_n(t, \alpha) - P_{n+1}(t, \alpha)| \leq 4\varepsilon_n + 2\varepsilon_{n+1}$.

Esta última propriedade implica, em virtude da convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n$, a convergência uniforme da sucessão (2.11). Denotemos

$$\Psi(t, \alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(t, \alpha).$$

Em conformidade com as propriedades da sucessão (2.11) constatamos que a função construída, $\Psi(\cdot, \cdot)$, é a função procurada. ■

Corolário 18 *Sendo dada uma classe AC_φ de curvas absolutamente contínuas, podemos construir uma função contínua de duas variáveis, $w(t, \alpha)$, possuidora das seguintes propriedades:*

1. *Obtemos todas as funções da classe dada, atribuindo a α todos os valores numéricos possíveis $0 \leq \alpha \leq 1$;*
2. *qualquer que seja o número α_0 , $0 \leq \alpha_0 \leq 1$, a função, $w(\cdot, \alpha_0)$, pertence à classe dada.*

Prova: Dado o Teorema 17, resta-nos mostrar que se $x(\cdot) \in AC_\varphi$, então $x(\cdot) \in C_\varphi$. Para tal, basta considerar como família finita de intervalos sem pontos comuns na definição de AC_φ , apenas o intervalo em $[0, 1]$, definido pelos pontos t e $t+h$. A condição (2.2) fica: $|x(t+h) - x(t)| \leq \varphi(|h|)$. ■

Passamos agora à aplicação do Lema de M. A. Lavrentiev ao problema da existência de mínimo.

Teorema 19 (Teorema da existência de Tonelli - variante) *Sob as hipóteses:*

(S1) $L(\cdot, \cdot, \cdot)$ é uma função finita e contínua, conjuntamente com as suas derivadas parciais até à segunda ordem, em todos os pontos (t, x, v) da região

$$\begin{cases} 0 \leq t \leq 1 \\ 0 \leq x \leq 1 \\ -\infty < v < +\infty \end{cases}; \quad (2.12)$$

(S2) $L(\cdot, \cdot, \cdot)$ é coercivo: para todos os pontos da região (2.12)

$$L(t, x, v) \geq a |v|^{1+b} + c,$$

onde $a, b > 0$;

(S3) Em todos os pontos da região (2.12),³

$$L_{vv}(t, x, v) = \frac{\partial^2 L}{\partial v^2}(t, x, v) \geq 0;$$

existe uma solução para o problema

$$\begin{aligned} J[x(\cdot)] &= \int_0^1 L(t, x(t), \dot{x}(t)) dt \rightarrow \min \\ x(\cdot) &\in AC_\varphi([0, 1]; [0, 1]) \\ x(0) &= 0, \quad x(1) = 1. \end{aligned} \quad (2.13)$$

□

Observação 20 Consideramos sempre as funções $x(\cdot) \in AC_\varphi([0, 1]; [0, 1])$ para as quais existe, determinado e finito, o integral $\int_0^1 L(t, x(t), \dot{x}(t)) dt$ (no sentido de Lebesgue). Convencionamos colocar $L(t, x(t), \dot{x}(t)) = 0$ quando $\dot{x}(t)$ não existe determinado e finito. □

Prova do Teorema 19: Dado o Corolário 18, o problema da existência de um minimizante para (2.13), reduz-se ao problema da existência de um minimizante para a seguinte função de uma variável:

$$\Phi(\alpha) = \int_0^1 L(t, w(t, \alpha), \dot{w}(t, \alpha)) dt, \quad \alpha \in [0, 1].$$

³ Esta hipótese é equivalente a $L(\cdot, \cdot, \cdot)$ ser uma função convexa em v , dado que $L(\cdot, \cdot, \cdot) \in C^2$.

Se nos lembrarmos que uma função semi-contínua inferior atinge o mínimo em qualquer compacto (Teorema 71 em Apêndice), vemos que nos basta demonstrar que sob as hipóteses (S1)-(S3) a função $\Phi(\cdot)$ é semi-contínua inferior. Vamos então mostrar que sendo dado um $\alpha_0 \in [0, 1]$ e tomando um número $\sigma > 0$ arbitrariamente, é possível determinar um ε tal que, para todo o α em $[0, 1]$ com $|\alpha - \alpha_0| < \varepsilon$, se tem

$$\Phi(\alpha) \geq \Phi(\alpha_0) - \sigma. \quad (2.14)$$

Observemos, em primeiro lugar, que a desigualdade precedente é certamente satisfeita para todos os α para os quais $\Phi(\alpha) \geq \Phi(\alpha_0)$. Podemos, portanto, limitar a nossa atenção aos α que satisfazem a desigualdade

$$\Phi(\alpha) < \Phi(\alpha_0) \Leftrightarrow \int_0^1 [L(t, w(t, \alpha), \dot{w}(t, \alpha)) - L(t, w(t, \alpha_0), \dot{w}(t, \alpha_0))] dt < 0. \quad (2.15)$$

Notar que, dado o facto de $w(\cdot, \alpha)$ e $w(\cdot, \alpha_0)$ serem funções absolutamente contínuas, ambas as funções $\dot{w}(\cdot, \alpha)$ e $\dot{w}(\cdot, \alpha_0)$ são determinadas e finitas em quase todos os pontos $t \in [0, 1]$, de maneira que podemos negligenciar os pontos excepcionais no cálculo do integral em (2.15).

Dado um número inteiro positivo r , seja E_r o conjunto dos pontos t de $[0, 1]$ onde $\dot{w}(t, \alpha_0)$ é finito e satisfaz a desigualdade

$$|\dot{w}(t, \alpha_0)| \geq r. \quad (2.16)$$

Para as medidas⁴ destes conjuntos temos $\lim_{r \rightarrow +\infty} m(E_r) = 0$. Com efeito, em caso contrário, existiria uma subsucessão $r_k \rightarrow +\infty$ tal que as medidas $m(E_{r_k})$ seriam todas superiores a um número $\eta > 0$, como decorre do facto de

$$r_l > r_k \Rightarrow E_{r_k} \supset E_{r_l}.$$

Haveriam então pontos comuns a todos os E_{r_k} e estes pontos (\hat{t}) formariam um conjunto de medida $\geq \eta$, o que é impossível já que $\dot{w}(\hat{t}, \alpha_0)$ não poderia ser finito para esses pontos \hat{t} . Se $r \rightarrow +\infty$ segue-se que o integral de $L(t, w(t, \alpha_0), \dot{w}(t, \alpha_0))$ em E_r tende a zero e que, se denotarmos por CE_r o complementar de E_r em relação ao intervalo $[0, 1]$, temos

$$\int_{CE_r} L(t, w(t, \alpha_0), \dot{w}(t, \alpha_0)) dt \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} \int_0^1 L(t, w(t, \alpha_0), \dot{w}(t, \alpha_0)) dt. \quad (2.16)$$

Consideremos agora o integral

$$\int_{E_r} L(t, w(t, \alpha), \dot{w}(t, \alpha)) dt.$$

Em virtude de (S2), temos

$$\begin{aligned} \int_{E_r} L(t, w(t, \alpha), \dot{w}(t, \alpha)) dt &\geq c \cdot m(E_r) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \int_0^1 L(t, w(t, \alpha), \dot{w}(t, \alpha)) dt &\geq \int_{CE_r} L(t, w(t, \alpha), \dot{w}(t, \alpha)) dt + c \cdot m(E_r). \end{aligned}$$

Tendo, por outro lado, que

$$c \cdot m(E_r) \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0,$$

⁴ Em todo o trabalho, $m(\cdot)$ representa a medida de Lebesgue em \mathbb{R}^n .

vem que para \bar{r} suficientemente grande

$$\int_0^1 L(t, w(t, \alpha), \dot{w}(t, \alpha)) dt > \int_{CE_{\bar{r}}} L(t, w(t, \alpha), \dot{w}(t, \alpha)) dt - \frac{\sigma}{5},$$

e

$$\begin{aligned} & \int_{E_{\bar{r}}} L(t, w(t, \alpha_0), \dot{w}(t, \alpha_0)) dt < \frac{\sigma}{5} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \int_0^1 L(t, w(t, \alpha_0), \dot{w}(t, \alpha_0)) dt < \int_{CE_{\bar{r}}} L(t, w(t, \alpha_0), \dot{w}(t, \alpha_0)) dt + \frac{\sigma}{5}. \end{aligned}$$

Como consequência,

$$\Phi(\alpha) - \Phi(\alpha_0) > \int_{CE_{\bar{r}}} [L(t, w(t, \alpha), \dot{w}(t, \alpha)) - L(t, w(t, \alpha_0), \dot{w}(t, \alpha_0))] dt - \frac{2}{5}\sigma, \quad (2.17)$$

e isto para todo o $\alpha \in [0, 1]$ tal que $w(\cdot, \alpha)$ é uma função como na Observação 20.

Da fórmula de Taylor, em relação a $\dot{w}(t, \alpha)$, temos que para quase todos os t

$$\begin{aligned} L(t, w(t, \alpha), \dot{w}(t, \alpha)) &= L(t, w(t, \alpha), \dot{w}(t, \alpha_0)) + \\ &+ (\dot{w}(t, \alpha) - \dot{w}(t, \alpha_0)) L_v(t, w(t, \alpha), \dot{w}(t, \alpha_0)) + \\ &+ \frac{1}{2} (\dot{w}(t, \alpha) - \dot{w}(t, \alpha_0))^2 L_{vv}(t, w(t, \alpha), \theta) \end{aligned} \quad (2.18)$$

onde θ indica um determinado valor, compreendido entre $\dot{w}(t, \alpha_0)$ e $\dot{w}(t, \alpha)$. Já que o primeiro membro da igualdade precedente é integrável no conjunto $CE_{\bar{r}}$ (*vide* (2.15) e (2.17)), o mesmo acontece com o segundo. O primeiro termo deste segundo membro é integrável bem como $L_v(t, w(t, \alpha), \dot{w}(t, \alpha_0))$; e como esta

função é limitada em $CE_{\bar{\tau}}$, segue-se a integrabilidade de

$$(\dot{w}(t, \alpha) - \dot{w}(t, \alpha_0)) L_v(t, w(t, \alpha), \dot{w}(t, \alpha_0)).$$

Concluímos então que existe o integral de

$$(\dot{w}(t, \alpha) - \dot{w}(t, \alpha_0))^2 L_{vv}(t, w(t, \alpha), \theta)$$

em $CE_{\bar{\tau}}$. Podemos deste modo escrever, como decorre de (2.17) e (2.18),

$$\begin{aligned} & \Phi(\alpha) - \Phi(\alpha_0) + \frac{2}{5}\sigma > \\ & > \int_{CE_{\bar{\tau}}} [L(t, w(t, \alpha), \dot{w}(t, \alpha_0)) - L(t, w(t, \alpha_0), \dot{w}(t, \alpha_0))] dt + \\ & + \int_{CE_{\bar{\tau}}} (\dot{w}(t, \alpha) - \dot{w}(t, \alpha_0)) L_v(t, w(t, \alpha), \dot{w}(t, \alpha_0)) dt + \\ & + \frac{1}{2} \int_{CE_{\bar{\tau}}} (\dot{w}(t, \alpha) - \dot{w}(t, \alpha_0))^2 L_{vv}(t, w(t, \alpha), \theta) dt. \end{aligned}$$

O último integral, em virtude de (S3), não é com certeza negativo, de modo que o podemos suprimir:

$$\begin{aligned} & \Phi(\alpha) - \Phi(\alpha_0) + \frac{2}{5}\sigma > \\ & > \int_{CE_{\bar{\tau}}} [L(t, w(t, \alpha), \dot{w}(t, \alpha_0)) - L(t, w(t, \alpha_0), \dot{w}(t, \alpha_0))] dt + (2.19) \\ & + \int_{CE_{\bar{\tau}}} (\dot{w}(t, \alpha) - \dot{w}(t, \alpha_0)) L_v(t, w(t, \alpha), \dot{w}(t, \alpha_0)) dt. \end{aligned}$$

Pelo Teorema do Valor Médio (TVM),

$$L(t, w(t, \alpha), \dot{w}(t, \alpha_0)) - L(t, w(t, \alpha_0), \dot{w}(t, \alpha_0)) =$$

$$= (w(t, \alpha) - w(t, \alpha_0)) L_x(t, \bar{\theta}, \dot{w}(t, \alpha_0))$$

onde $\bar{\theta}$ é um valor compreendido entre $w(t, \alpha_0)$ e $w(t, \alpha)$. Como

$$|w(t, \alpha) - w(t, \alpha_0)| \leq 1$$

podemos deduzir de (2.19) que

$$\Phi(\alpha) - \Phi(\alpha_0) + \frac{2}{5}\sigma > \quad (2.20)$$

$$> -M \cdot N_1 \cdot (1 - 0) + \int_{CE_{\bar{r}}} (\dot{w}(t, \alpha) - \dot{w}(t, \alpha_0)) L_v(t, w(t, \alpha), \dot{w}(t, \alpha_0)) dt$$

onde

$$M = \max_{0 \leq t \leq 1} \{|w(t, \alpha) - w(t, \alpha_0)|\} \leq 1$$

e

$$N_1 = \max \{|L_x(t, x, v)| : t, x \in [0, 1], |v| \leq \bar{r}\}. \quad (2.21)$$

A desigualdade (2.20) toma a forma

$$\begin{aligned} & \Phi(\alpha) - \Phi(\alpha_0) + \frac{2}{5}\sigma + M \cdot N_1 > \\ & > \int_{CE_{\bar{r}}} (\dot{w}(t, \alpha) - \dot{w}(t, \alpha_0)) (L_v(t, w(t, \alpha), \dot{w}(t, \alpha_0)) - L_v(t, w(t, \alpha_0), \dot{w}(t, \alpha_0))) dt \\ & \quad + \int_{CE_{\bar{r}}} (\dot{w}(t, \alpha) - \dot{w}(t, \alpha_0)) L_v(t, w(t, \alpha_0), \dot{w}(t, \alpha_0)) dt \Leftrightarrow \\ & \quad \stackrel{\text{TYM}}{\Leftrightarrow} \Phi(\alpha) - \Phi(\alpha_0) + \frac{2}{5}\sigma + M \cdot N_1 > \\ & > \int_{CE_{\bar{r}}} (\dot{w}(t, \alpha) - \dot{w}(t, \alpha_0)) (w(t, \alpha) - w(t, \alpha_0)) L_{vx}(t, w(t, \alpha^*), \dot{w}(t, \alpha_0)) dt + \\ & \quad + \int_{CE_{\bar{r}}} (\dot{w}(t, \alpha) - \dot{w}(t, \alpha_0)) L_v(t, w(t, \alpha_0), \dot{w}(t, \alpha_0)) dt > \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&> -M \cdot N_2 \left(\int_0^1 |\dot{w}(t, \alpha)| dt + \bar{r} (1 - 0) \right) + \\
&\quad + \int_{CE_{\bar{r}}} (\dot{w}(t, \alpha) - \dot{w}(t, \alpha_0)) L_v(t, w(t, \alpha_0), \dot{w}(t, \alpha_0)) dt
\end{aligned} \tag{2.22}$$

onde

$$N_2 = \max \{ |L_{vx}(t, x, v)| : t, x \in [0, 1], |v| \leq \bar{r} \}.$$

Sabemos de (S2) que

$$\frac{L(t, w(t, \alpha), \dot{w}(t, \alpha)) - c}{a} \geq |\dot{w}(t, \alpha)|^{1+b} \geq |\dot{w}(t, \alpha)|$$

o que nos permite escrever

$$\int_0^1 |\dot{w}(t, \alpha)| dt \leq \frac{1}{a} \int_0^1 (L(t, w(t, \alpha), \dot{w}(t, \alpha)) - c) dt = \frac{1}{a} (\Phi(\alpha) - c).$$

Por (2.15) vem que

$$\int_0^1 |\dot{w}(t, \alpha)| dt < \frac{1}{a} \Phi(\alpha_0) - \frac{c}{a}$$

e usando (2.22) obtemos a seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned}
&\Phi(\alpha) - \Phi(\alpha_0) + \frac{2}{5}\sigma + M \left(N_1 + N_2 \bar{r} - \frac{c}{a} N_2 + \frac{1}{a} N_2 \Phi(\alpha_0) \right) > \\
&> \int_{CE_{\bar{r}}} (\dot{w}(t, \alpha) - \dot{w}(t, \alpha_0)) L_v(t, w(t, \alpha_0), \dot{w}(t, \alpha_0)) dt.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

O nosso objectivo é demonstrar que o integral do segundo membro tende para zero com M (valor absoluto máximo de $w(t, \alpha) - w(t, \alpha_0)$). Façamos

$$f(t) = \begin{cases} L_v(t, w(t, \alpha_0), \dot{w}(t, \alpha_0)) & \text{se } t \in CE_{\bar{r}} \\ 0 & \text{se } t \in E_{\bar{r}} \end{cases}$$

Vem que

$$\begin{aligned} \int_{CE_F} (\dot{w}(t, \alpha) - \dot{w}(t, \alpha_0)) L_v(t, w(t, \alpha_0), \dot{w}(t, \alpha_0)) dt = \\ = \int_0^1 (\dot{w}(t, \alpha) - \dot{w}(t, \alpha_0)) f(t) dt. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Observe-se que a proposição estaria já demonstrada, se $f(\cdot)$ fosse finita e diferenciável com continuidade. Com efeito, nessas circunstâncias, integrando por partes teríamos

$$\begin{aligned} \int_0^1 (\dot{w}(t, \alpha) - \dot{w}(t, \alpha_0)) f(t) dt = \\ = (w(1, \alpha) - w(1, \alpha_0)) f(1) - (w(0, \alpha) - w(0, \alpha_0)) f(0) - \\ - \int_0^1 (w(t, \alpha) - w(t, \alpha_0)) \dot{f}(t) dt. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Atendendo que

$$\int_0^1 (w(0, \alpha) - w(0, \alpha_0)) \dot{f}(t) dt = (w(0, \alpha) - w(0, \alpha_0)) (f(1) - f(0)),$$

poderíamos reescrever (2.25) como

$$\begin{aligned} \int_0^1 (\dot{w}(t, \alpha) - \dot{w}(t, \alpha_0)) f(t) dt = \\ = (w(1, \alpha) - w(1, \alpha_0) - w(0, \alpha) + w(0, \alpha_0)) f(1) - \\ - \int_0^1 (w(t, \alpha) - w(t, \alpha_0) - w(0, \alpha) + w(0, \alpha_0)) \dot{f}(t) dt \end{aligned}$$

o que nos permitiria concluir pela desigualdade:

$$\left| \int_0^1 (\dot{w}(t, \alpha) - \dot{w}(t, \alpha_0)) f(t) dt \right| \leq 2M \left(|f(1)| + \int_0^1 |\dot{f}(t)| dt \right).$$

No entanto, a função $f(\cdot)$ pode não ter derivada e até nem ser contínua: O que temos a certeza, é que ela é integrável e limitada:

$$|f(t)| \leq N_3 = \max \{ |L_v(t, x, v)| : t, x \in [0, 1], |v| \leq \bar{r} \}.$$

Consideremos um polinómio $p(\cdot)$ que, para já, podemos pensar como arbitrário.

Temos que:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 (\dot{w}(t, \alpha) - \dot{w}(t, \alpha_0)) f(t) dt - \int_0^1 (\dot{w}(t, \alpha) - \dot{w}(t, \alpha_0)) p(t) dt \right| &\leq \\ &\leq \int_0^1 |\dot{w}(t, \alpha) - \dot{w}(t, \alpha_0)| |f(t) - p(t)| dt \end{aligned}$$

e, recorrendo à desigualdade de Hölder (Corolário 78, em Apêndice), resulta⁵

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 (\dot{w}(t, \alpha) - \dot{w}(t, \alpha_0)) f(t) dt - \int_0^1 (\dot{w}(t, \alpha) - \dot{w}(t, \alpha_0)) p(t) dt \right| &\leq \\ &\leq \left[\int_0^1 |\dot{w}(t, \alpha) - \dot{w}(t, \alpha_0)|^{1+b} dt \right]^{\frac{1}{1+b}} \left[\int_0^1 |f(t) - p(t)|^{\frac{1+b}{b}} dt \right]^{\frac{b}{1+b}}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Por outro lado, pela desigualdade de Minkowski (Corolário 79, em Apêndice),

$$\begin{aligned} \left[\int_0^1 |\dot{w}(t, \alpha) - \dot{w}(t, \alpha_0)|^{1+b} dt \right]^{\frac{1}{1+b}} &\leq \left[\int_0^1 |\dot{w}(t, \alpha)|^{1+b} dt \right]^{\frac{1}{1+b}} + \\ &+ \left[\int_0^1 |\dot{w}(t, \alpha_0)|^{1+b} dt \right]^{\frac{1}{1+b}}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Em virtude da hipótese (S2)

$$\begin{cases} |\dot{w}(t, \alpha)|^{1+b} \leq \frac{L(t, w(t, \alpha), \dot{w}(t, \alpha)) - c}{a} \\ |\dot{w}(t, \alpha_0)|^{1+b} \leq \frac{L(t, w(t, \alpha_0), \dot{w}(t, \alpha_0)) - c}{a} \end{cases}$$

⁵ $1+b > 1$.

e segue-se de (2.27) que

$$\begin{aligned} & \left[\int_0^1 |\dot{w}(t, \alpha) - \dot{w}(t, \alpha_0)|^{1+b} dt \right]^{\frac{1}{1+b}} \leq \\ & \leq \left(\frac{1}{a} \Phi(\alpha) - \frac{c}{a} \right)^{\frac{1}{1+b}} + \left(\frac{1}{a} \Phi(\alpha_0) - \frac{c}{a} \right)^{\frac{1}{1+b}} \stackrel{(2.15)}{\leq} 2 \left(\frac{1}{a} \Phi(\alpha_0) - \frac{c}{a} \right)^{\frac{1}{1+b}}. \end{aligned}$$

Desta última desigualdade e de (2.26) temos portanto

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^1 (\dot{w}(t, \alpha) - \dot{w}(t, \alpha_0)) f(t) dt - \int_0^1 (\dot{w}(t, \alpha) - \dot{w}(t, \alpha_0)) p(t) dt \right| \leq \\ & \leq 2 \left(\frac{1}{a} \Phi(\alpha_0) - \frac{c}{a} \right)^{\frac{1}{1+b}} \left[\int_0^1 |f(t) - p(t)|^{\frac{1+b}{b}} dt \right]^{\frac{b}{1+b}}. \end{aligned}$$

Atendendo ao seguinte resultado ([13, Teorema 9.16, p. 270]):

Se $x(\cdot) \in L_p([a, b], \mathbb{R})$ ($p \geq 1$) então, dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, existe um polinómio $q(\cdot)$ com coeficientes racionais tal que $\|q - x\|_p < \varepsilon$

basta notar que

$$\left[\int_0^1 |f(t) - p(t)|^{\frac{1+b}{b}} dt \right]^{\frac{b}{1+b}} = \|f - p\|_{(1+b)/b},$$

para concluirmos que podemos escolher $p(\cdot)$ de modo a que

$$\left| \int_0^1 (\dot{w}(t, \alpha) - \dot{w}(t, \alpha_0)) f(t) dt - \int_0^1 (\dot{w}(t, \alpha) - \dot{w}(t, \alpha_0)) p(t) dt \right| < \frac{\sigma}{5}.$$

Notar que esta última desigualdade é válida para todos os $w(t, \alpha)$ que satisfazem a desigualdade (2.15). Como $p(t)$ é um polinómio, tem derivada finita e contínua, de modo que

$$\int_0^1 (\dot{w}(t, \alpha) - \dot{w}(t, \alpha_0)) p(t) dt =$$

$$= [p(t) (w(t, \alpha) - w(t, \alpha_0))]_0^1 - \int_0^1 (w(t, \alpha) - w(t, \alpha_0)) \dot{p}(t) dt \xrightarrow{M \rightarrow 0} 0.$$

Por conseguinte, para todo o M suficientemente pequeno, temos que

$$\left| \int_0^1 (w(t, \alpha) - w(t, \alpha_0)) f(t) dt \right| < \frac{2}{5} \sigma$$

e, em virtude de (2.23) e (2.24),

$$\Phi(\alpha) - \Phi(\alpha_0) + \sigma > 0.$$

Fica assim demonstrada a semi-continuidade inferior do integral $\Phi(\cdot)$. ■

2.3 Sobre a possibilidade de estender a classe das funções admissíveis

Vamos demonstrar a seguinte proposição:

Teorema 21 *Se considerarmos como funções admissíveis, todas as funções contínuas de variação limitada*

$$x : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

verificando $x(0) = 0$, $x(1) = 1$, então os minimizantes do problema básico do Cálculo das Variações em regra não existem. □

Para tal, começamos com o seguinte Lema auxiliar.

Lema 22 *Seja $w : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua com*

$$w(0) = w_0 \text{ e } w(1) = w_1, \quad w_0, w_1 \in \mathbb{R}.$$

Então, dado $\varepsilon > 0$, existe uma função $\tilde{w} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ singular (função contínua de variação limitada cuja derivada se anula em q.t.p.) tal que

$$|w(t) - \tilde{w}(t)| \leq \varepsilon \quad \forall t \in [0, 1],$$

$$\tilde{w}(0) = w_0, \quad \tilde{w}(1) = w_1.$$

Prova: Vamos construir a função $\tilde{w}(\cdot)$ à custa de “funções de Cantor” que sabemos serem singulares (*vide* [18]). Como toda a função $w : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua é uniformemente contínua em $[0, 1]$, sabemos que

$$\exists \delta > 0 : |t_2 - t_1| < \delta \Rightarrow |w(t_2) - w(t_1)| < \varepsilon \quad (2.28)$$

$$\forall t_1, t_2 \in [0, 1].$$

Dividimos o segmento $[0, 1]$ em N intervalos iguais de amplitude $\bar{\delta} < \delta$:

$$[0, 1] = \bigcup_{i=0}^{N-1} [i\bar{\delta}, (i+1)\bar{\delta}].$$

Para cada um dos intervalos $J_0^i = [i\bar{\delta}, (i+1)\bar{\delta}]$ ($i = 0, \dots, N-1$) definimos a “função de Cantor” $F^i(\cdot)$ por repetição da seguinte construção: para cada intervalo fechado J_0^i definimos $F^i(\cdot)$ nos pontos extremos por

$$F^i(i\bar{\delta}) = w(i\bar{\delta}), \quad F^i((i+1)\bar{\delta}) = w((i+1)\bar{\delta}).$$

Seja I_1^i a segunda terça parte aberta de J_0^i e J_1^i o resto (reunião de dois intervalos fechados: $J_{1,1}^i$ e $J_{1,2}^i$). Definimos $F^i(\cdot)$ em $\overline{I_1^i}$ de modo a ter o valor constante igual à média dos valores nos pontos terminais de J_0^i :

$$F^i(t) = \frac{F^i(i\bar{\delta}) + F^i((i+1)\bar{\delta})}{2}, \quad \forall t \in \overline{I_1^i}.$$

Seja I_2^i a reunião das segundas terças partes abertas dos intervalos $J_{1,1}^i$ e $J_{1,2}^i$:

$$I_2^i = I_{2,1}^i \cup I_{2,2}^i.$$

No fecho de cada uma destas terças partes (em $\overline{I_{2,1}^i}$ e $\overline{I_{2,2}^i}$) definimos $F^i(\cdot)$ da maneira já descrita (como a média aritmética dos valores da função, respectivamente nos extremos do intervalo $J_{1,1}^i$ e $J_{1,2}^i$):

$$F^i(t) = \frac{F^i(i\bar{\delta}) + F^i((i + \frac{1}{3})\bar{\delta})}{2}, \quad \forall t \in \overline{I_{2,1}^i},$$

$$F^i(t) = \frac{F^i((i + \frac{2}{3})\bar{\delta}) + F^i((i + 1)\bar{\delta})}{2}, \quad \forall t \in \overline{I_{2,2}^i}.$$

Continuando: seja $J_2^i = J_1^i \setminus I_2^i \dots$

Em geral J_k^i é a reunião de 2^k intervalos fechados,

$$J_k^i = J_{k,1}^i \cup J_{k,2}^i \cup \dots \cup J_{k,2^k}^i,$$

cada um de comprimento $3^{-k}\bar{\delta}$; I_{k+1}^i é a reunião das 2^k segundas terças partes abertas dos intervalos $J_{k,l}^i$ ($l = 1, \dots, 2^k$); como $F^i(\cdot)$ já está definida em I_k^i também estará definida em cada intervalo de I_{k+1}^i pela maneira descrita, i.e., como a média dos seus valores nos dois pontos extremos do correspondente intervalo em J_k^i ; fazemos $J_{k+1}^i = J_k^i \setminus I_{k+1}^i$ e o processo continua. Temos então que $F^i(\cdot)$ está definida no conjunto aberto

$$G^i = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \bigcup_{l=1}^{2^k-1} I_{k,l}^i$$

(até mesmo na reunião dos $\overline{I_{k,l}^i}$) e não está definida num subconjunto do conjunto de Cantor C^i :

$$C^i = J_0^i \setminus G^i = \bigcap_{k=1}^{+\infty} J_k^i.$$

Uma vez que J_k^i é a reunião de 2^k intervalos, cada um dos quais de comprimento $\frac{\bar{\delta}}{3^k}$, a sua medida é $(\frac{2}{3})^k \bar{\delta}$ e por conseguinte C^i é um conjunto de medida nula.

Completamos a definição da função $F^i(\cdot)$ fazendo

$$F^i(t) = \sup_{\substack{t' < t \\ t' \in G^i}} F^i(t'), \quad \text{se } t \in C^i,$$

obtendo então uma “função de Cantor”:

- função contínua em todo o intervalo $[i\bar{\delta}, (i+1)\bar{\delta}]$;
- monótona para o intervalo $[i\bar{\delta}, (i+1)\bar{\delta}]$: não decrescente se $F^i(i\bar{\delta}) \leq F^i((i+1)\bar{\delta})$ e não crescente se $F^i(i\bar{\delta}) \geq F^i((i+1)\bar{\delta})$;
- com derivada nula em *q.t.p.* de $[i\bar{\delta}, (i+1)\bar{\delta}]$ ($F^i(t)$ não é o integral da sua derivada).

A função procurada, $\tilde{w}(\cdot)$, é obtida por “concatenação” das funções contínuas $F^i(\cdot)$:

$$\tilde{w}(t) = F^i(t), \quad t \in [i\bar{\delta}, (i+1)\bar{\delta}], \quad i = 0, \dots, N-1.$$

Temos então que

$$\forall t \in [0, 1] \quad \exists j \in \{0, \dots, N-1\} : t \in [j\bar{\delta}, (j+1)\bar{\delta}]$$

$$\tilde{w}(t) = F^j(t)$$

e, dada a monotonicidade de $F^j(\cdot)$,

$$w(j\bar{\delta}) \leq F^j(t) \leq w((j+1)\bar{\delta}) \quad (\text{não decrescente})$$

ou

$$w((j+1)\bar{\delta}) \leq F^j(t) \leq w(j\bar{\delta}) \quad (\text{n\~ao crescente})$$

de onde concluímos o desejado

$$|F^j(t) - w(t)| \leq \max \{ |w(j\bar{\delta}) - w(t)|, |w((j+1)\bar{\delta}) - w(t)| \} \stackrel{(2.28)}{\leq} \varepsilon.$$

■

Prova do Teorema 21: Seja $L(\cdot, \cdot, \cdot)$ uma função contínua com respeito aos seus argumentos t, x, v , definidos para $0 \leq t \leq 1$, $0 \leq x \leq 1$ e para todo o valor de v . A demonstração vai ser feita mostrando que o ínfimo do integral (2.1) para todas as funções $x(\cdot)$ de variação limitada, é igual ao ínfimo do mesmo integral aonde supomos $x = \phi(t)$, $v = \psi(t)$, para $\phi(\cdot)$ e $\psi(\cdot)$ duas funções mensuráveis arbitrárias com $0 \leq \phi(t) \leq 1$. A proposição enunciada resulta então do facto de que embora o último limite inferior seja sempre atingido para um certo par de funções mensuráveis $\phi(\cdot)$ e $\psi(\cdot)$, em geral a função $\psi(\cdot)$ não é a derivada da função $\phi(\cdot)$.

Deste modo, reduzimos o teorema à demonstração da seguinte proposição: para todas as funções mensuráveis $\phi(\cdot)$ e $\psi(\cdot)$ ($0 \leq \phi(t) \leq 1$ e tais que a função $L(\cdot, \phi(\cdot), \psi(\cdot))$ é integrável), qualquer que seja o $\varepsilon > 0$ existe sempre uma função $x(\cdot)$ contínua e de variação limitada,

$$0 \leq x(t) \leq 1; \quad x(0) = 0; \quad x(1) = 1,$$



tal que

UNIVERSIDADE DE AVEIRO
SERVIÇOS DE DOCUMENTAÇÃO

$$\left| \int_0^1 L(t, \phi(t), \psi(t)) dt - \int_0^1 L(t, x(t), \dot{x}(t)) dt \right| \leq \varepsilon.$$

Passemos à demonstração desta última proposição.

A continuidade da função $L(\cdot, \cdot, \cdot)$ assegura a existência de um número M tal que

$$|L(t, x, 0)| \leq M, \quad 0 \leq t, x \leq 1. \quad (2.29)$$

Por outro lado a integrabilidade de $L(\cdot, \phi(\cdot), \psi(\cdot))$ faz com que, qualquer que seja o ε , exista um conjunto perfeito P (*vide* Definição 82 em Apêndice), situado sobre o segmento $]0, 1[$, com as seguintes propriedades:

1. $m(P) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{8M}$;
2. $\psi(\cdot)$ é contínua sobre P ;
3. $\left| \int_{CP} L(t, \phi(t), \psi(t)) dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{8}$, onde CP representa o conjunto complementar de P em relação ao segmento $]0, 1[$.

Seja $\bar{\psi}(\cdot)$ uma função que é igual a $\psi(\cdot)$ sobre P e igual a 0 fora de P . Fazendo

$$J_0 = \int_0^1 L(t, \phi(t), \psi(t)) dt,$$

temos que

$$\left| J_0 - \int_P L(t, \phi(t), \bar{\psi}(t)) dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{8}.$$

Por outro lado, em virtude da desigualdade (2.29), temos que

$$\left| \int_{CP} L(t, \phi(t), 0) dt \right| \leq M \cdot m(CP) \leq \frac{\varepsilon}{8}$$

de onde se segue

$$\left| J_0 - \int_0^1 L(t, \phi(t), \bar{\psi}(t)) dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{4}. \quad (2.30)$$

Consideremos agora o integral

$$J_1 = \int_0^1 L(t, \phi(t), \bar{\psi}(t)) dt.$$

Seja N o máximo de $|\bar{\psi}(t)|$ para $0 \leq t \leq 1$ e K o máximo de $|L(t, x, v)|$ para $0 \leq t \leq 1$, $0 \leq x \leq 1$ e $|v| \leq N$.

Dado que as funções $\phi(\cdot)$ e $\bar{\psi}(\cdot)$ são mensuráveis, existe um conjunto perfeito P_1 com as seguintes propriedades:

1. $m(P_1) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{8K}$;
2. $\phi(\cdot)$ é contínua em P_1 ;
3. $\left| \int_{CP_1} L(t, \phi(t), \bar{\psi}(t)) dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{8}$.

Seja $\bar{\phi}(\cdot)$ uma função contínua, igual a $\phi(\cdot)$ em P_1 e variando linearmente fora de P_1 de modo a que $\bar{\phi}(0) = 0$ e $\bar{\phi}(1) = 1$. Temos que: (CP_1 denota o complementar de P_1 em $[0, 1]$)

$$\begin{aligned} & \left| J_1 - \int_0^1 L(t, \bar{\phi}(t), \bar{\psi}(t)) dt \right| \leq \\ & \leq \left| J_1 - \int_{P_1} L(t, \phi(t), \bar{\psi}(t)) dt \right| + \left| \int_{CP_1} L(t, \bar{\phi}(t), \bar{\psi}(t)) dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{4}. \end{aligned}$$

Logo, de (2.30), vem que

$$\left| J_0 - \int_0^1 L(t, \bar{\phi}(t), \bar{\psi}(t)) dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.31)$$

A continuidade de $L(\cdot, \cdot, \cdot)$ faz, por seu lado, que exista um número h tal que

$$|L(t, x + \Delta x, v) - L(t, x, v)| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{para todo } |v| \leq N \text{ e } |\Delta x| \leq h. \quad (2.32)$$

Seja $\phi^*(t) = \int_0^t \bar{\psi}(\tau) d\tau$. A função $\phi^*(\cdot)$ é (absolutamente) contínua. Segue-se do Lema 22 (onde fazemos $w = \bar{\phi} - \phi^*$) que podemos construir uma função $\tilde{\phi}(\cdot)$, contínua de variação limitada, de tal modo que para h escolhido em (2.32)

i) $\dot{\tilde{\phi}}(t) = 0$ para quase todos os $t \in [0, 1]$;

ii) $|\bar{\phi}(t) - \phi^*(t) - \tilde{\phi}(t)| \leq h \quad \forall t \in [0, 1]$;

iii) fazendo $x(t) = \phi^*(t) + \tilde{\phi}(t)$ se tenha $x(0) = 0$, $x(1) = 1$ e $0 \leq x(t) \leq 1$.

Temos que

$$|\bar{\phi}(t) - x(t)| \leq h, \quad (2.33)$$

$\dot{x}(t) = \bar{\psi}(t)$ em quase todos os t e, de iii), as funções $\phi^*(\cdot)$ e $\tilde{\phi}(\cdot)$ são, tal como $x(\cdot)$, de variação limitada. (Toda a função absolutamente contínua é de variação limitada. A soma de funções de variação limitada é uma função de variação limitada ([18, 2., p. 375]). Logo $x(\cdot)$ é uma função contínua de variação limitada.) Por outro lado, de (2.33) e (2.32)

$$\left| \int_0^1 L(t, \bar{\phi}(t), \bar{\psi}(t)) dt - \int_0^1 L(t, x(t), \dot{x}(t)) dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Portanto, de (2.31), $\left| J_0 - \int_0^1 L(t, x(t), \dot{x}(t)) dt \right| \leq \varepsilon$ o que demonstra a proposição enunciada. ■

Capítulo 3

Regularidade

Em §3.1, começamos por apresentar exemplos de problemas que possuem minimizantes que não são da classe C^2 . Seguem-se depois exemplos em que o mínimo não pertence à classe C^1 , à classe das funções Lipschitzianas ou mesmo absolutamente contínuas. Terminamos com a construção de um problema do Cálculo das Variações, conducente a uma curva minimizante que não é uma extremal em nenhum intervalo (Exemplo 35).

Mostramos depois, em §3.2 vários resultados de regularidade: um teorema de regularidade lipschitziana (Teorema 38); o teorema de Tonelli sobre a continuidade da primeira derivada (Teorema 40); o facto de as extremais de duBois-Reymond para *lagrangeanos elípticos* serem necessariamente da classe C^2 (Teorema 48). Abordamos também a questão de saber se o ínfimo dos valores do integral em (P) sob a classe das curvas absolutamente contínuas é igual ao ínfimo dos valores do mesmo integral sob a classe das curvas contínuas $x(\cdot)$ com derivadas $\dot{x}(\cdot)$ contínuas. Demonstramos (Teorema 44) que esta questão se res-

ponde afirmativamente se supusermos $L_x(\cdot, \cdot, \cdot)$ limitado em $[0, 1] \times [0, 1] \times \mathbb{R}$.

Sem esta hipótese, vamos ver que recebemos uma resposta negativa - este é o assunto tratado em §3.3 onde falamos do fenómeno de Lavrentiev.

3.1 Observações sobre a regularidade

Os seguintes exemplos mostram que existem extremais de duBois-Reymond e mesmo minimizantes que não são soluções da equação de Euler-Lagrange.

Exemplo 23 *Um exemplo simples é dado pela funcional*

$$J[x(\cdot)] = \int_{-1}^1 (\dot{x}(t) - 2|t|)^2 dt, \\ x(0) = 0, \quad x(1) = 1,$$

com $n = 1$. Este problema é minimizado pelas funções $\hat{x}(t) = t|t|$, que são da classe C^1 em $[-1, 1]$ mas não pertencem a C^2 em $]-1, 1[$:

$$\hat{x}(t) = 2|t|$$

$$\ddot{\hat{x}}(t) = \begin{cases} 2 & \text{se } t > 0 \\ -2 & \text{se } t < 0 \end{cases}.$$

Deste modo $\hat{x}(t)$ verifica (1.12), mas não a equação de Euler-Lagrange (1.7). \square

Contudo este exemplo não é totalmente satisfatório uma vez que $L_v(\cdot, \cdot, \cdot) \notin C^1$:

$$L_v(t, x, v) = 2(v - 2|t|)$$

$$L_{vt}(t, x, v) = \begin{cases} -4 & \text{se } t > 0 \\ 4 & \text{se } t < 0 \end{cases}.$$

Portanto apresentamos mais um exemplo, desta vez com lagrangeano polinomial.

Exemplo 24 Seja $n = 1$ e $L(t, x, v) = x^2 (2t - v)^2$. Então

$$\hat{x}(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } -1 \leq t \leq 0 \\ t^2 & \text{para } 0 \leq t \leq 1 \end{cases},$$

é uma função da classe C^1 que é minimizante de

$$J[x(\cdot)] = \int_{-1}^1 x(t)^2 (2t - \dot{x}(t))^2 dt,$$

na classe das funções $x(\cdot) \in C^1([-1, 1])$ que satisfazem as condições de fronteira $x(-1) = 0$ e $x(1) = 1$. Claramente, $x(\cdot)$ não é da classe C^2 . \square

A situação, no entanto, é ainda mais rica do que esta. Por exemplo, existem lagrangeanos para os quais o problema básico do Cálculo das Variações que lhe está associado com respeito a valores de fronteira fixos é minimizado por funções Lipschitzianas, mas por nenhuma função C^1 , e por conseguinte por nenhuma da classe C^2 . Este fenómeno foi descoberto por Euler em 1779 e foi considerado na altura bastante paradoxal.

Exemplo 25 (paradoxo de Euler) Considere-se o lagrangeano

$$L(t, x, v) = (v^2 - 1)^2.$$

O ínfimo do integral variacional

$$J[x(\cdot)] = \int_0^1 (\dot{x}(t)^2 - 1)^2 dt,$$

onde consideramos $x(\cdot) \in \mathcal{X} = C^1([0, 1])$ satisfazendo $x(0) = 0$ e $x(1) = 0$, é zero. Este ínfimo não pode ser atingido em \mathcal{X} . Contudo, existem várias funções $x(\cdot)$ em “zig-zag” no intervalo $[0, 1]$ satisfazendo as condições de fronteira $x(0) = 0$ e $x(1) = 0$. Na realidade, qualquer função Lipschitziana $x(\cdot)$ satisfazendo $\dot{x}(t) = \pm 1$ em quase todos os pontos $t \in [0, 1]$ fornece o valor mínimo zero a $J[\cdot]$ (vide Fig. 3.2). \square

Este exemplo mostra bem que os espaços C^2 ou C^1 não são as classes naturais onde todo o problema (P) deve ser considerado. Problemas com minimizantes

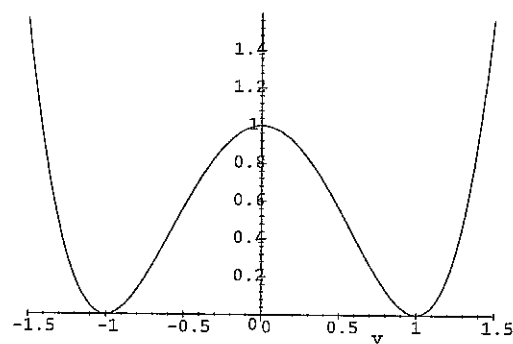


Figura 3.1 $L(v) = (v^2 - 1)^2$.

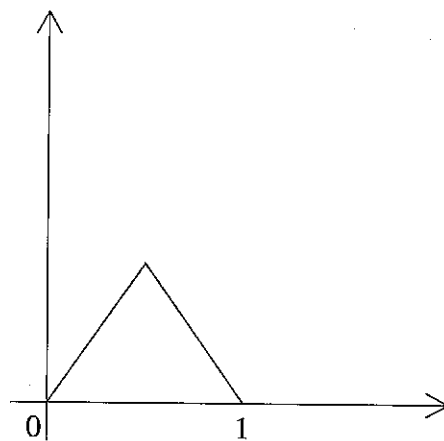
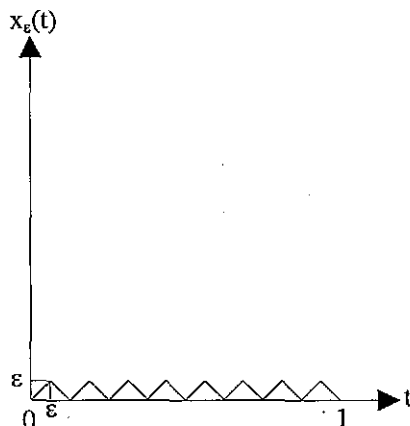


Figura 3.2 Exemplo de um minimizante “zig-zag” para $J[\cdot]$ do Ex. 25.

Figura 3.3 $x_\epsilon(\cdot)$

aos “zig-zags” não são de maneira nenhuma uma questão artificial e aparecem naturalmente nas aplicações. Por exemplo, para andar de barco à vela contra o vento, o marinheiro tem que virar de bordo, i.e., ele tem de seguir uma linha em “zig-zag” mudando entre os dois ângulos mais favoráveis de modo a usar o vento da melhor maneira. Uma divertida discussão deste e de problemas relacionados pode ser encontrado em [34, pp. 155-160].

Exemplo 26 *Seja*

$$J[x(\cdot)] = \int_0^1 (1 + x(t)^2) (1 + (\dot{x}(t)^2 - 1)^2) dt.$$

Procuramos o mínimo desta funcional usando funções admissíveis $x(\cdot)$ de valor real, sujeitas às condições de fronteira $x(0) = 0$ e $x(1) = 0$. Na figura 3.3, temos que $\dot{x}_\epsilon = 1$ e $\dot{x}_\epsilon = -1$, alternadamente, em partes sucessivas de uma subdivisão do intervalo $0 \leq t \leq 1$ num número par de intervalos de igual comprimento ϵ . Para a função correspondente $x_\epsilon(\cdot)$, que toma valores entre 0 e ϵ , a função integranda nunca excede $1 + \epsilon^2$ e, por isso, o integral é quando muito $1 + \epsilon^2$. Por outro lado, em qualquer curva admissível definida para $0 \leq t \leq 1$, a função integranda é claramente ≥ 1 , só tomando o valor 1 quando tivermos simultaneamente $x = 0$ e $\dot{x} = \pm 1$. Segue-se que o ínfimo de $J[\cdot]$ é 1 entre as funções C^1 ,

Lipshitzianas ou mesmo de entre as funções absolutamente contínuas. Contudo, o ínfimo não é atingido para nenhuma dessas funções uma vez que

$$J[x(\cdot)] = 1 \Rightarrow \dot{x}(t) = \pm 1 \quad \text{q.t.p.} \quad t \in [0, 1]$$

o que é impossível. Por outras palavras, se insistirmos em obter um minimizante, temos de alargar a classe das funções admissíveis ainda mais, admitindo “zig-zags infinitesimais” (o comprimento ε das subdivisões é feito tender para zero) nos quais $x(t) = 0$ enquanto $\dot{x}(t)$ é alternadamente $+1$ e -1 . \square

Observação 27 Não podemos aplicar o teorema da existência de Tonelli ao Exemplo anterior. Vejamos que $L(t, x, v) = (1 + x^2) \left(1 + (v^2 - 1)^2\right)$ viola a condição de convexidade no argumento v : para t e x arbitrariamente fixos

$$L(t, x, \alpha v_1 + (1 - \alpha) v_2) \leq \alpha L(t, x, v_1) + (1 - \alpha) L(t, x, v_2)$$

para qualquer $v_1, v_2 \in \mathbb{R}$ e $\alpha \in [0, 1]$. Para isso, basta constatar que

$$\begin{aligned} 2 &= L(0, 0, 0) = L\left(0, 0, \frac{1}{2}(1) + \frac{1}{2}(-1)\right) > \\ &> \frac{1}{2}L(0, 0, 1) + \frac{1}{2}L(0, 0, -1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1. \end{aligned}$$

\square

A construção do exemplo, que apresenta uma curva minimizante que não é uma extremal em nenhum intervalo, fundamenta-se no Teorema de Whitney (Teorema 34): qualquer conjunto fechado pode ser conjunto de zeros de uma função C^∞ . Para isso precisamos de vários Lemas e resultados auxiliares:

Lema 28 (Decomposição de Whitney) *Seja F um conjunto fechado não vazio de \mathbb{R}^n e Ω o seu complementar. Então existe uma colecção de cubos fechados \mathcal{F} ,*

$$\mathcal{F} = \{Q_1, Q_2, \dots, Q_k, \dots\},$$

tal que:

$$(i) \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k = \Omega = CF;$$

(ii) *Os Q_k são mutuamente disjuntos:*

$$\text{Int}(Q_j) \cap \text{Int}(Q_k) = \emptyset. \text{ se } j \neq k;$$

(iii) Para cada k ,

$$\text{diam}(Q_k) \leq \text{dist}(Q_k, F) \leq 4 \text{diam}(Q_k).$$

Observação 29 Para um cubo fechado Q , $\text{diam}(Q)$ denota o seu diâmetro e $\text{dist}(Q, F)$ a sua distância a F . \square

Prova: Consideremos o conjunto \mathcal{P} dos pontos em \mathbb{R}^n cujas coordenadas são inteiras. Este conjunto determina uma *malha* \mathcal{M}_0 que é uma colecção de cubos: concretamente todos os cubos de aresta unitária, cujos vértices são pontos do conjunto \mathcal{P} acima considerado. A malha \mathcal{M}_0 conduz-nos a uma cadeia infinita de malhas \mathcal{M}_k , $-\infty < k < +\infty$:

$$\mathcal{M}_k = 2^{-k} \mathcal{M}_0.$$

Assim, na malha \mathcal{M}_k os cubos têm arestas de comprimento 2^{-k} , diâmetro $\sqrt{n} 2^{-k}$ e cada um deles dá origem a 2^n cubos na malha \mathcal{M}_{k+1} por bissecção das arestas.

Para além das malhas \mathcal{M}_k consideramos as *camadas* Ω_k , definidas por:

$$\Omega_k = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : c 2^{-k} < \text{dist}(x, F) \leq c 2^{-k+1} \right\},$$

onde c é uma constante positiva que fixaremos de seguida. Temos que

$$\Omega = \bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} \Omega_k.$$

Fazemos agora uma escolha inicial de cubos, e denotamos a colecção resultante por \mathcal{F}_0 . A nossa escolha é feita como se segue: consideramos os cubos da malha \mathcal{M}_k e incluímos um cubo desta malha em \mathcal{F}_0 se ele intersecta Ω_k , i.e., tomamos

$$\mathcal{F}_0 = \bigcup_k \{Q \in \mathcal{M}_k : Q \cap \Omega_k \neq \emptyset\}.$$

Temos então que

$$\bigcup_{k \in \mathcal{F}_0} Q = \Omega.$$

Para uma escolha apropriada de c , vamos obter as desigualdades em (iii):

$$\text{diam}(Q) \leq \text{dist}(Q, F) \leq 4 \text{diam}(Q), \quad Q \in \mathcal{F}_0. \quad (3.1)$$

Vamos então provar (3.1). Suponhamos $Q \in \mathcal{M}_k$; então o diâmetro de Q é igual a $\sqrt{n} 2^{-k}$. Uma vez que $Q \in \mathcal{F}_0$, existe $x \in Q \cap \Omega_k$. Como consequência

$$\text{dist}(Q, F) \leq \text{dist}(x, F) \leq c 2^{-k+1}, \quad \text{e}$$

$$\text{dist}(Q, F) \geq \text{dist}(x, F) - \text{diam}(Q) > c 2^{-k} - \sqrt{n} 2^{-k}.$$

Se escolhermos $c = 2\sqrt{n}$ obtemos (3.1). Desta desigualdade concluímos que os cubos $Q \in \mathcal{F}_0$ são disjuntos de F . Notar que a colecção \mathcal{F}_0 tem todas as propriedades requeridas, excepto que os cubos nela contidos não são necessariamente disjuntos (falta mostrar a propriedade (ii)). Para concluirmos a prova do Lema precisamos de refinar a escolha que nos conduziu a \mathcal{F}_0 , eliminando aqueles cubos que são, na realidade, desnecessários. Para isso observemos que se Q_1 e Q_2 são dois cubos tomados respectivamente da malha \mathcal{M}_{k_1} e \mathcal{M}_{k_2} então se Q_1 e Q_2 não são disjuntos, um deles deve estar contido no outro (em particular $Q_1 \subset Q_2$ se $k_1 \geq k_2$).

Comecemos então com qualquer cubo $Q \in \mathcal{F}_0$ e consideremos o *cubo maximal* em \mathcal{F}_0 que o contém. Por causa da desigualdade (3.1), para todo o $Q' \in \mathcal{F}_0$,

$$\text{diam}(Q') \leq \text{dist}(Q', F)$$

$$\text{dist}(Q, F) \leq 4 \text{diam}(Q)$$

e, deste modo, se Q' contém Q temos

$$\text{dist}(Q', F) \leq \text{dist}(Q, F)$$

e portanto

$$\text{diam}(Q') \leq 4 \text{diam}(Q).$$

Como quaisquer dois cubos Q' e Q'' que contêm Q têm uma intersecção não trivial, pela observação feita acima, cada cubo $Q \in \mathcal{F}_0$ tem um único cubo maximal em \mathcal{F}_0 que o contém. Pela mesma observação, estes cubos maximais são também disjuntos. Fazemos \mathcal{F} denotar a colecção de cubos maximais de \mathcal{F}_0 .

Então

$$(i) \quad \bigcup_{Q \in \mathcal{F}} Q = \Omega,$$

(ii) Os cubos de \mathcal{F} são disjuntos,

$$(iii) \quad \text{diam}(Q) \leq \text{dist}(Q, F) \leq 4 \text{diam}(Q), \quad Q \in \mathcal{F}.$$

O Lema 28 está provado. ■

Vamos agora fazer algumas observações acerca da família \mathcal{F} de cubos cuja existência é garantida pelo Lema 28. Dizemos que dois cubos distintos de \mathcal{F} , Q_1 e Q_2 , se *toçam*, se as suas fronteiras têm um ponto comum (dois cubos distintos de \mathcal{F} têm sempre interiores disjuntos).

Proposição 30. *Suponhamos que Q_1 e Q_2 se tocam. Então*

$$\frac{1}{4} \text{diam}(Q_2) \leq \text{diam}(Q_1) \leq 4 \text{diam}(Q_2).$$

Prova: Sabemos que (Lema 28, iii)

$$\text{dist}(Q_2, F) \leq 4 \text{diam}(Q_2).$$

Então, uma vez que Q_1 e Q_2 se tocam,

$$\text{dist}(Q_1, F) \leq 4 \text{diam}(Q_2) + \text{diam}(Q_2) = 5 \text{diam}(Q_2).$$

Mas, por outro lado,

$$\text{diam}(Q_1) \leq \text{dist}(Q_1, F)$$

e por conseguinte

$$\text{diam}(Q_1) \leq 5 \text{diam}(Q_2).$$

Contudo $\text{diam}(Q_1) = 2^k \text{diam}(Q_2)$ para algum inteiro k e portanto devemos ter

$$\text{diam}(Q_1) \leq 4 \text{diam}(Q_2).$$

O mesmo raciocínio (invertendo os papéis de Q_1 e Q_2), permite-nos concluir que

$$\text{diam}(Q_2) \leq 4 \text{diam}(Q_1) \Leftrightarrow \text{diam}(Q_1) \geq \frac{1}{4} \text{diam}(Q_2).$$

■

Proposição 31 *Suponhamos Q pertencente a \mathcal{F} . Então existem no máximo 12^n cubos em \mathcal{F} que tocam Q .*

Prova: Se o cubo Q pertence à malha \mathcal{M}_k , então podemos concluir que existem 3^n cubos (incluindo Q) que pertencem à malha \mathcal{M}_k e tocam Q . Como cada cubo na malha \mathcal{M}_k pode conter no máximo 4^n cubos de \mathcal{F} de diâmetro maior ou igual a $\frac{1}{4}$ do diâmetro de Q , resulta da Proposição 30 o pretendido. ■

Seja Q_k um cubo de \mathcal{F} e denotemos por x^k o seu centro e por l_k o comprimento comum dos seus lados. Temos então que

$$\text{diam}(Q_k) = \sqrt{n} l_k.$$

Para qualquer $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$, que é arbitrário mas será mantido fixo no que se segue, denotamos por Q_k^* o cubo que tem o mesmo centro que Q_k mas que é estendido pelo factor $1 + \varepsilon$, i.e.,

$$Q_k^* = \left\{ (1 + \varepsilon) (x - x^k) + x^k : x \in Q_k \right\}.$$

Temos $Q_k \subset Q_k^*$, e que os cubos fechados Q_k^* já não têm interiores disjuntos.

Temos contudo o seguinte resultado:

Lema 32 *Cada ponto de Ω está contido no máximo em 12^n dos cubos Q_k^* .*

Prova: Sejam Q e Q_k dois cubos de \mathcal{F} . Vamos provar que Q_k^* intersecta Q apenas se Q_k tocar Q . Consideremos a união de Q_k com todos os cubos de \mathcal{F} que lhe tocam. Uma vez que os diâmetros destes cubos são todos maiores ou iguais que $\frac{1}{4}$ do diâmetro de Q_k (Proposição 30) é claro que esta união contém Q_k^* . Por conseguinte Q intersecta Q_k^* apenas se Q toca Q_k . Como qualquer ponto $x \in \Omega$

pertence a algum cubo Q , pela Proposição 31 existem quando muito 12^n cubos Q_k^* que contêm x . ■

Lema 33 (Partição da Unidade) *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $\mathcal{F} = \{Q_j\}$ a decomposição de Whitney para Ω . Então existem funções*

$$\phi_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R},$$

da classe C^∞ , satisfazendo:

- a) $0 \leq \phi_j(x) \leq 1$ para todo o $x \in \mathbb{R}^n$;
- b) $\phi_j(x) = 1$ se $x \in Q_j$;
- c) $\phi_j(x) = 0$ se $x \notin Q_j^*$;
- d) $\forall \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n, \left| \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n} \phi_j(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \right| \leq K_\alpha \text{diam}(Q_j)^{-\alpha_1 - \alpha_2 - \dots - \alpha_n}$;
- e) $\sum_j \phi_j(x) = 1$ se $x \in \Omega$.

Prova: Denotemos por Q_0 o cubo de comprimento unitário centrado na origem. Começamos por mostrar que para qualquer $\varepsilon > 0$, existe uma função $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$, pertencente à classe C^∞ , com as seguintes propriedades:

$$0 \leq \varphi(x) \leq 1$$

$$\varphi(x) = 1 \text{ se } x \in Q_0$$

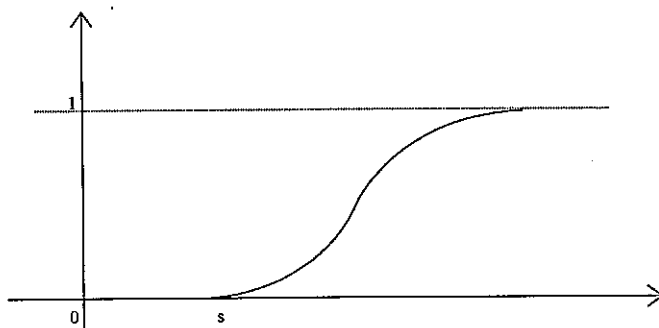
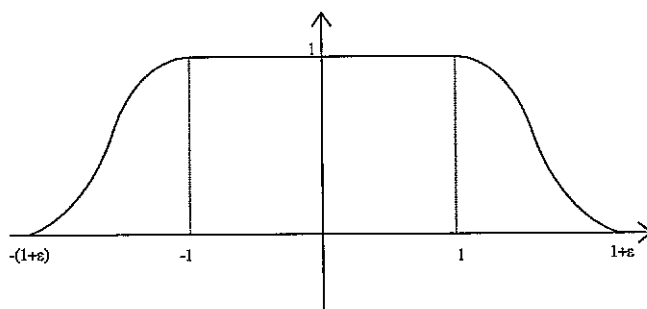
$$\varphi(x) = 0 \text{ se } x \notin (1 + \varepsilon) Q_0.$$

Para isso definamos a função auxiliar $h_s : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$, $\in C^\infty$, pela expressão

$$h_s(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x-s}} & \text{se } x > s \\ 0 & \text{se } x \leq s \end{cases}.$$

Esta função tem a forma indicada na Fig. 3.4.

À custa dela definimos

Figura 3.4 $h_s(\cdot)$ Figura 3.5 $g(\cdot)$ - "função chapéu"

a “função chapéu” $g(\cdot)$ (Fig. 3.5):

$$g(x) = \frac{h_{-(1+\varepsilon)}(x) h_{-(1+\varepsilon)}(-x)}{h_{-(1+\varepsilon)}(x) h_{-(1+\varepsilon)}(-x) + h_1(x) h_1(-x)}.$$

A função $\varphi(x) = g(\|x\|)$ é a função desejada. Notar que se $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, então

$$\varphi(x - \bar{x}) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in Q_{\bar{x}} \\ 0 & \text{se } x \notin (1 + \varepsilon) Q_{\bar{x}} \end{cases}$$

para $Q_{\bar{x}}$ a denotar o cubo de aresta unitária centrado em \bar{x} .

Seja $\varphi_k(\cdot)$ a função $\varphi(\cdot)$ ajustada ao cubo Q_k , i.e.,

$$\varphi_k(x) = \varphi\left(\frac{x - x^k}{l_k}\right).$$

Lembrar que x^k é o centro de Q_k e l_k é o comprimento comum dos seus lados.

Temos então que $\varphi_k(x) = 1$ se $x \in Q_k$ e $\varphi_k(x) = 0$ se $x \notin Q_k^*$. Observemos

ainda que

$$\left| \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n} \varphi_k(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \right| \leq K_\alpha \text{diam}(Q_k)^{-\alpha_1 - \alpha_2 - \dots - \alpha_n}.$$

Definamos agora $\phi_k(x)$ para $x \in \Omega$ por

$$\phi_k(x) = \frac{\varphi_k(x)}{\sum_{j=1}^{+\infty} \varphi_j(x)}.$$

Resulta a identidade

$$\sum_{k=1k}^{+\infty} \phi_k(x) \equiv 1, \quad x \in \Omega$$

que define a partição da unidade requerida. ■

Teorema 34 (Teorema de Whitney) *Dado um conjunto fechado $F \subseteq \mathbb{R}^n$, existe uma função $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ de classe C^∞ , tal que*

$$\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = 0\} = F.$$

Prova: *Seja $\{Q_j\}$ a decomposição de Whitney para o complemento de F e $\{\phi_j\}$ a correspondente partição da unidade. Para cada j seja*

$$\delta_j = \text{diam}(Q_j).$$

Consideremos a função

$$f(x) = \sum_{j=1}^{+\infty} 2^{-2j/\delta_j} \phi_j(x).$$

A série converge absolutamente e uniformemente para todo o $x \in \mathbb{R}^n$. Reparar que o conjunto de zeros de $f(\cdot)$ é precisamente o conjunto F . Falta verificar que $f(\cdot)$ é infinitamente diferenciável. A série obtida aplicando $\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}$ a $f(x)$ tem j -ésimo termo que é majorado (Lema 33, d) por

$$K_\alpha 2^{-2j/\delta_j} \delta_j^{-\alpha_1 - \alpha_2 - \cdots - \alpha_n}. \quad (3.2)$$

Fixemos agora $x \in CF$. Se v for a distância de x a F :

$$v = \text{dist}(x, F),$$

então x está contido no máximo em 12^n dos cubos $\{Q_{j_k}\}$, $k = 1, \dots, 12^n$ (Lema 32) e cada um desses cubos tem diâmetro δ_{j_k} tal que

$$\delta_{j_k} \leq v \leq 4\delta_{j_k} \quad (\text{Lema 28, iii}).$$

Usando (3.2) vemos que, neste ponto x ,

$$\left| \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} \right| \leq C 12^n 2^{-2j/v} v^{-\alpha_1 - \alpha_2 - \cdots - \alpha_n}.$$

À medida que $v \rightarrow 0$ vemos que esta última expressão tende para zero. Resulta destas estimativas, que todas as derivadas de $f(\cdot)$ existem em CF e que elas tendem a zero nos pontos de CF que tendem para F . Pelo mesmo raciocínio, todas as derivadas de $f(\cdot)$ em ∂F (fronteira de F) são zero. As derivadas de $f(\cdot)$ no interior de F são zero por definição. Concluimos que $f(\cdot) \in C^\infty$ em todo o \mathbb{R}^n . ■

Passamos agora à construção do exemplo indicado.

Exemplo 35 Seja $x = \psi(t)$, $t \in [0, 1]$, uma curva absolutamente contínua não possuindo derivada num conjunto denso em $[0, 1]$.¹ Pelo Teorema de Whitney podemos construir uma função contínua $\Phi(\cdot, \cdot)$ possuindo as seguintes propriedades:

- $\Phi(t, x) > 0$, se $x \neq \psi(t)$; $\Phi(t, x) = 0$ para $x = \psi(t)$;
- $\Phi(\cdot, \cdot)$ tem derivadas contínuas até à ordem m .

Consideremos o integral

$$J = \int_0^1 \Phi(t, x) \cdot (1 + \dot{x}^2) dt.$$

Fazendo

$$\Phi(t, x) \cdot (1 + \dot{x}^2) = \Psi(t, x, \dot{x})$$

temos as seguintes propriedades para $\Psi(t, x, \dot{x})$:

1. Ψ possui todas as derivadas até a ordem m , em relação a t , x e \dot{x} ;
2. $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \dot{x}^2} \geq 0$;
3. O mínimo de $J[\cdot]$ é atingido para a curva $x = \psi(t)$, que não é uma extremal em nenhum intervalo. \square

Exemplo 36 (Construção de uma função $\psi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, absolutamente contínua, não possuindo derivada num conjunto denso de $[0, 1]$) Seja

$$q_1, q_2, \dots, q_n, \dots$$

uma enumeração dos racionais (ou qualquer outro conjunto denso numerável) de $[0, 1]$ e definamos

$$g(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{se } \tau < 0 \\ 1 & \text{se } \tau \geq 0 \end{cases}.$$

A função $g(\cdot)$ toma valores em $[0, 1]$, é contínua excepto em 0, e é tal que $\frac{1}{h} \int_0^h g(\tau) d\tau$ tem limites laterais distintos:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^h g(\tau) d\tau}{h} = 1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\int_0^h g(\tau) d\tau}{h} = 0.$$

¹ Tal resulta possível, pois existem conjuntos em $[0, 1]$ “insignificantes” do ponto de vista topológico (que têm obrigatoriamente interior vazio ou, equivalentemente, têm complementar denso em um todo) mas que são “grandes” em termos da medida de Lebesgue.

Façamos agora

$$f(\tau) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n} g(\tau - q_n).$$

Esta função é claramente integrável e resulta que

$$\psi(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$$

é absolutamente contínua (Teorema 65) mas não é diferenciável nos pontos q_k ($k = 1, 2, \dots$) pois

$$\frac{1}{h} \int_{q_k}^{q_k+h} f(\tau) d\tau$$

tem limites laterais distintos quando h tende a 0. Com efeito, o k -ésimo termo de $f(\tau)$ tem limites laterais para

$$\frac{1}{h} \int_{q_k}^{q_k+h} 2^{-k} g(\tau - q_k) d\tau$$

que diferem de 2^{-k} .

□

3.2 Resultados de Regularidade

Viramos agora a atenção para a prova de teoremas de regularidade do nosso problema.

3.2.1 Regularidade Lipschitziana

Vamos assumir que \mathcal{A} é um subconjunto fechado (não necessariamente próprio) do espaço $\mathbb{R}^{1+n} = \{(t, x)\}$. Consideremos a classe \mathcal{X} de todas as curvas AC n -vectoriais

$$x(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t)), \quad a \leq t \leq b,$$

satisfazendo $(t, x(t)) \in \mathcal{A}$ para $t \in [a, b]$. A classe das trajectórias admissíveis serão então as funções de \mathcal{X} que satisfazem as condições de fronteira dadas:

$$x(a) = x_a, \quad x(b) = x_b.$$

Para cada uma delas, $x(\cdot)$, denotamos por $G_{x(\cdot)}$ o seu gráfico:

$$G_{x(\cdot)} = \{(t, x(t)) : t \in [a, b]\} \subseteq \mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^{1+n}.$$

Seja $x(\cdot)$ uma trajectória admissível. Nos Teoremas 38 e 40, precisaremos das seguintes hipóteses sobre a função $L(t, x(t), \cdot)$:

(i) Para cada t , $a \leq t \leq b$, a função n -vectorial em v

$$v \mapsto L_v(t, x(t), v) = \begin{bmatrix} L_{v^1}(t, x(t), v) \\ \vdots \\ L_{v^n}(t, x(t), v) \end{bmatrix}$$

é injectiva:

$$a \leq t \leq b, \quad v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n, \quad v_1 \neq v_2 \Rightarrow L_v(t, x(t), v_1) \neq L_v(t, x(t), v_2);$$

(ii) Para $\tilde{v} \in \mathbb{R}^n$ e $\|\tilde{v}\| \rightarrow \infty$, resulta que

$$\|L_v(t, x(t), v)\| \rightarrow \infty$$

uniformemente em $[a, b]$. Noutros modos, assumimos que dado $N > 0$, existe uma outra constante $R \geq 0$ tal que

$$a \leq t \leq b, \quad v \in \mathbb{R}^n, \quad \|v\| \geq R \Rightarrow \|L_v(t, x(t), v)\| \geq N.$$

(iii) A curva $x(t)$, $t \in [a, b]$, satisfaz as equações de Euler: existe uma função n -vectorial AC

$$\phi(t) = (\phi^1(t), \dots, \phi^n(t)),$$

tal que em quase todos os pontos de $[a, b]$

$$L_v(t, x(t), \dot{x}(t)) = \phi(t),$$

$$\frac{d}{dt}\phi(t) = L_x(t, x(t), \dot{x}(t)) = \begin{bmatrix} L_{x^1}(t, x(t), \dot{x}(t)) \\ \vdots \\ L_{x^n}(t, x(t), \dot{x}(t)) \end{bmatrix}.$$

Observação 37 Notar que (i) e (ii) são independentes. Por exemplo, para $n = 1$, $L(t, x, v) = (1 + v^2)^{1/2}$, temos que $L_v(t, x, v) = v(1 + v^2)^{-1/2}$. Esta é uma função em v , limitada e estritamente crescente em $]-\infty, +\infty[$. Limitada pois

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + v^2} &\geq \sqrt{v^2} = |v| \\ \frac{1}{\sqrt{1 + v^2}} &\leq \frac{1}{|v|} \\ \left| \frac{v}{\sqrt{1 + v^2}} \right| &\leq 1. \end{aligned}$$

Estritamente crescente já que

$$\frac{d}{dv} \left(\frac{v}{\sqrt{1 + v^2}} \right) = \frac{\sqrt{1 + v^2} - \frac{v^2}{\sqrt{1 + v^2}}}{1 + v^2} = \frac{1}{(1 + v^2)\sqrt{1 + v^2}} > 0.$$

Por conseguinte $L(\cdot, \cdot, \cdot)$ satisfaz (i) mas não (ii):

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{v}{\sqrt{1 + v^2}} = 1.$$

Por outro lado, $L(t, x, v) = -v^2 + v^4$ satisfaz (ii):

$$L_v(t, x, v) = -2v + 4v^3 \rightarrow \infty \quad \text{quando} \quad v \rightarrow \infty,$$

mas não satisfaz (i): por exemplo $L_v(t, x, v) = -2v + 4v^3$ anula-se para $v = 0$,

$$v = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ e } v = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

□

Teorema 38 (primeiras derivadas limitadas) *Se $L(\cdot, \cdot, \cdot)$ é da classe C^1 em $A \times \mathbb{R}^n$ satisfazendo (ii) e se $x(\cdot)$ é uma função n -vectorial AC em $[a, b]$ que verifica (iii), então $\dot{x}(\cdot)$ é essencialmente limitada e $x(\cdot)$ é Lipschitziana em $[a, b]$.*

Prova: A função n -vectorial $\phi(\cdot)$ em (iii) é AC, portanto contínua e limitada em $[a, b]$. Digamos que $\|\phi(t)\| \leq N$. Por (ii) existe $R \geq 0$ tal que

$$t \in [a, b], \quad v \in \mathbb{R}^n, \quad \|v\| \geq R \Rightarrow \|L_v(t, x(t), v)\| \geq N + 1.$$

Uma vez que $\|L_v(t, x(t), \dot{x}(t))\| = \|\phi(t)\| \leq N$ em q.t.p. de $[a, b]$, concluímos que $\|\dot{x}(t)\| \leq R$ também em q.t.p. de $[a, b]$. Uma vez que $x(\cdot) \in AC$, concluímos que $x(\cdot)$ é Lipschitziana de constante R em $[a, b]$. ■

Vamos agora enunciar, na forma de um teorema, as principais condições conhecidas assegurando que as soluções de (P) são Lipschitzianas. Estes resultados servirão de comparação posterior com o resultado por nós obtido em §4.1. As demonstrações devem-se a Clarke e Vinter e podem ser encontradas em [9] (veja-se também [6]). Optámos por não colocá-las aqui, uma vez que elas recorrem sistematicamente a conceitos de *Análise Não Suave* cujo estudo cai fora do âmbito deste trabalho.

Teorema 39 *Se para além das hipóteses do Teorema da Existência de Tonelli, for verificada, para todo o $(t, x, v) \in [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, qualquer uma das condições² (C1), (C2), (C3), (C4) ou (C5):*

(C1) *O Lagrangeano é autónomo (i.e., independente de t);*

² Reparar que (C1) é um caso particular da condição (C2). Dada a sua particular importância (veja-se §4.3) colocamo-la aqui em destaque.

As condições (C3) e (C5) generalizam, respectivamente, as condições clássicas de Morrey e Bernstein (vide [9]).

(C2) Existem k_0 real e $k_1(\cdot)$ integrável tais que

$$|L_t(t, x, v)| \leq k_0 |L(t, x, v)| + k_1(t);$$

(C3) Existem k_0 real e $k_1(\cdot), k_2(\cdot)$ integráveis tais que

$$\|L_x(t, x, v)\| \leq k_0 |L(t, x, v)| + k_1(t) \|L_v(t, x, v)\| + k_2(t);$$

(C4) Para cada t , a função $(x, v) \rightarrow F(x, v) = L(t, x, v)$ é convexa;

(C5) $L_{vv}(t, x, v) > 0$ e existe uma constante k_0 tal que

$$\begin{aligned} \|L_{vv}^{-1}(t, x, v) (L_x(t, x, v) - L_{vt}(t, x, v) - L_{vx}(t, x, v) v)\| &\leq \\ &\leq k_0 (\|v\|^{2+b} + 1), \end{aligned}$$

com b a constante positiva que aparece na condição de coercividade do Teorema da existência de Tonelli;

então qualquer solução para o problema básico do Cálculo das Variações é Lipschitziana. ■

3.2.2 Regularidade C^1

Teorema 40 (de Tonelli - continuidade da primeira derivada) Se $\dot{x}(\cdot)$ é AC em $[a, b]$ com gráfico em \mathcal{A} e derivada $\dot{x}(\cdot)$ essencialmente limitada em $[a, b]$, se $L(\cdot, \cdot, \cdot)$ é da classe C^1 em $\mathcal{A} \times \mathbb{R}^n$ e se se verificam as hipóteses (i) e (iii), então $\dot{x}(\cdot)$ existe e é contínua em todo o $[a, b]$, i.e., $x(\cdot) \in C^1([a, b])$.

Observação 41 Se não soubermos que $\dot{x}(\cdot)$ é essencialmente limitada, então a conclusão do Teorema é ainda válida dada a hipótese adicional (ii) relativamente a $L(\cdot, \cdot, \cdot)$, como decorre do Teorema 38. □

Prova: Se $x(\cdot) \in AC([a, b])$ com $\dot{x}(\cdot)$ essencialmente limitada, então

$$L(\cdot, x(\cdot), \dot{x}(\cdot))$$

é também essencialmente limitada, mensurável e integrável à Lebesgue em $[a, b]$.

Temos de provar que:

1. $\dot{x}(\cdot)$ existe para todo o ponto do segmento $[a, b]$;
2. $\dot{x}(\cdot)$ é contínua em $[a, b]$.

Uma vez que $x(\cdot) \in AC$ em $[a, b]$, a derivada $\dot{x}(\cdot)$ existe em quase todos os pontos de $[a, b]$. Sabemos também que $\dot{x}(\cdot)$ é essencialmente limitada, digamos

$$\|\dot{x}(t)\| \leq m \quad \text{q.t.p. } t \in [a, b].$$

Seja S o conjunto de todos os $t \in [a, b]$ onde:

- $\dot{x}(t), \dot{\phi}(t)$ estão definidas;
- $\|\dot{x}(t)\| \leq m$;
- para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, $L_{v^i}(t, x(t), \dot{x}(t))$ coincide com $\phi_i(t)$ e verificam-se as relações

$$\frac{d}{dt}\phi_i(t) = L_{v^i}(t, x(t), \dot{x}(t)).$$

Então $S \subset [a, b]$, $m(S) = b - a$ e, por isso, S é denso em $[a, b]$. Se \bar{t} for um ponto arbitrário de $[a, b]$, então \bar{t} é um ponto de acumulação de pontos $t \in S$ com $t \neq \bar{t}$. Provemos primeiro que $\dot{x}(t)$ tem limite quando $t \rightarrow \bar{t}$ por valores de t em S . Suponhamos o contrário. Uma vez que $\dot{x}(\cdot)$ é limitado em S , então existem sucessões $(t_k), (t'_k)$ de pontos de S com $t_k \rightarrow \bar{t}, t'_k \rightarrow \bar{t}$ e tais que $(\dot{x}(t_k)), (\dot{x}(t'_k))$ têm limites finitos distintos: $\dot{x}(t_k) \rightarrow u, \dot{x}(t'_k) \rightarrow v, u \neq v, u, v \in \mathbb{R}^n$.

Dado que as relações

$$L_{v^i}(t, x(t), \dot{x}(t)) = \phi_i(t), \quad i = 1, \dots, n,$$

se verificam para todos os $t \in S$, em particular também são verdadeiras para $t = t_k$ e $t = t'_k$. Assim, à medida que $k \rightarrow +\infty$, obtemos duas relações que por comparação nos permitem escrever

$$L_{v^i}(\bar{t}, x(\bar{t}), u) = L_{v^i}(\bar{t}, x(\bar{t}), v), \quad i = 1, \dots, n.$$

A hipótese (i) implica que $u = v$, uma contradição. Isto prova que $u(\bar{t}) = \lim_{\substack{t \rightarrow \bar{t} \\ t \in S}} \dot{x}(t)$ existe e é finito quando $t \rightarrow \bar{t}$ ao longo de pontos de S , e que isto se verifica para todo o $\bar{t} \in [a, b]$. O mesmo argumento mostra que $u(\cdot)$ é uma função contínua em $[a, b]$.

Provemos agora que $u(t) = \dot{x}(t)$ para todo o $t \in [a, b]$. Com efeito, $\dot{x}(\cdot)$ é mensurável e portanto contínua em certos subconjuntos perfeitos K_s de $[a, b]$ com

$$m(K_s) > b - a - \frac{1}{s}.$$

Para todo o s e

$$\bar{t} \in K_s$$

fixos, existe uma sucessão (t_k) de pontos $t_k \in S \cap K_s$ com

$$t_k \rightarrow \bar{t}, \quad \dot{x}(\bar{t}) = \lim \dot{x}(t_k) = u(\bar{t}) \quad \text{quando } k \rightarrow +\infty.$$

Deste modo, $\dot{x}(t) = u(t)$ para cada K_s e portanto $\dot{x}(t) = u(t)$ em q.t.p. $t \in [a, b]$.

Finalmente, para todo o $t \in [a, b]$ temos que

$$x(t) - x(a) = \int_a^t \dot{x}(\tau) d\tau = \int_a^t u(\tau) d\tau.$$

Por isso $x(\cdot)$ é continuamente diferenciável em $[a, b]$, $\dot{x}(\cdot) = u(\cdot)$ em toda a parte e $x(\cdot) \in C^1$ como afirmado. ■

Observação 42 (Um contra exemplo para o teorema 40) *O mínimo da funcional*

$$J[x(\cdot)] = \int_{-1}^1 x^2(t) (1 - \dot{x}(t))^2 dt$$

com $x(-1) = 0$ e $x(1) = 1$ é certamente atingido pela trajectória $\hat{x}(\cdot)$ definida por

$$\hat{x}(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } -1 \leq t \leq 0 \\ t & \text{para } 0 \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

Embora $\hat{x}(\cdot) \in AC$, $\dot{\hat{x}}(t)$ não existe em $t = 0$:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\hat{x}(h) - \hat{x}(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = 1,$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\hat{x}(h) - \hat{x}(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{0}{h} = 0.$$

Aqui $L(t, x, v) = x^2(1 - v)^2$ não satisfaz (i) ao longo de $\hat{x}(\cdot)$:

$$L_v(t, x, v) = -2x^2(1 - v),$$

$$\dot{\hat{x}}(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } -1 \leq t < 0 \\ 1 & \text{para } 0 < t \leq 1 \end{cases},$$

$$L_v(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) = \begin{cases} 0 & \text{para } -1 \leq t < 0 \\ 0 & \text{para } 0 < t \leq 1 \end{cases}.$$

□

Teorema 43 (M. A. Lavrentiev) *Seja $M > 0$ e $L(\cdot, \cdot, \cdot)$ uma função contínua, diferenciável em x , e tal que $\left| \frac{\partial L(t, x, \dot{x})}{\partial x} \right| \leq M$ em $[0, 1] \times [0, 1] \times \mathbb{R}$. Seja $\bar{x}(\cdot)$*

$$0 < \bar{x}(t) < 1, \quad 0 \leq t \leq 1$$

uma função absolutamente contínua com $\bar{x}(0) = x_0$, $\bar{x}(1) = x_1$ e tal que a função $L(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t))$ é integrável. Sendo assim existe, qualquer que seja $\varepsilon > 0$, uma função $\hat{x}(\cdot)$ com derivada contínua e verificando as condições:

$$1. \hat{x}(0) = x_0, \hat{x}(1) = x_1;$$

$$2. |\bar{x}(t) - \hat{x}(t)| < \varepsilon;$$

$$3. \left| \int_0^1 L(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t)) dt - \int_0^1 L(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) dt \right| < \varepsilon.$$

Prova: Fazemos as seguintes convenções preliminares:

$$N_r = \max_{\substack{0 \leq t \leq 1 \\ 0 \leq x \leq 1 \\ |\dot{x}| \leq r}} \{|L(t, x, \dot{x})|\};$$

P é um conjunto perfeito situado no segmento $]0, 1[$ do eixo dos t , com medida $\frac{1}{2}$ e tal que $\bar{x}(\cdot)$ é contínua em P ;

$$R = \max_{t \in P} \{|\bar{x}(t)|\};$$

$$h_\varepsilon < \min \left\{ 1, \frac{1}{M} \right\}$$

tal que para $|\Delta v| \leq h_\varepsilon$

$$|L(t, x, v + \Delta v) - L(t, x, v)| < \frac{\varepsilon}{4} \quad (3.3)$$

para um certo $\varepsilon > 0$ e para todos os valores das variáveis $0 \leq t \leq 1$, $0 \leq x \leq 1$, $|v| \leq R + 1$.

Passemos agora à construção da função $\hat{x}(\cdot)$.

Como as funções $\hat{x}(\cdot)$ e $L(\cdot, \bar{x}(\cdot), \dot{\bar{x}}(\cdot))$ são integráveis, existe, qualquer que seja $\varepsilon > 0$, um conjunto perfeito P_ε situado sobre o segmento $]0, 1[$, de tal modo que temos:

$$1. m(P_\varepsilon) > 1 - \frac{\varepsilon}{24N_0}, P_\varepsilon \supset P \text{ para } \varepsilon \leq \frac{1}{2};$$

$$2. \text{ existe uma função } \bar{u}(\cdot) \text{ contínua em } [0, 1] \text{ e tal que } \dot{\bar{x}}(t) = \bar{u}(t) \text{ em } P_\varepsilon;$$

3. $\left| \int_{CP_\varepsilon} L(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t)) dt \right| < \frac{\varepsilon}{12}$, onde CP_ε representa o complementar de P_ε relativamente a $]0, 1[$;

$$4. \int_{CP_\varepsilon} |\dot{\bar{x}}(t)| dt < \frac{h_\varepsilon \varepsilon}{12}.$$

Em virtude da propriedade 2, $\dot{\bar{x}}(\cdot)$ é limitado em P_ε . Seja $|\dot{\bar{x}}(t)| < R_\varepsilon$ em P_ε .

Da continuidade de $L(\cdot, \cdot, \cdot)$, existe um número H_ε , $0 < H_\varepsilon < \varepsilon h_\varepsilon$, tal que para $|\Delta v| < H_\varepsilon$

$$|L(t, x, v + \Delta v) - L(t, x, v)| < \frac{\varepsilon}{12} \quad (3.4)$$

para todos os valores das variáveis $0 \leq t \leq 1$, $0 \leq x \leq 1$, $|v| \leq R_\varepsilon + 1$. Posto isto, em conformidade com a mesma condição 2, podemos dividir o conjunto P_ε num número finito de partes, sem pontos comuns duas a duas,

$$P_\varepsilon = \pi_1 \cup \pi_2 \cup \dots \cup \pi_p,$$

de tal modo que

$$|\dot{\bar{x}}(t_1) - \dot{\bar{x}}(t_2)| < \frac{1}{12} H_\varepsilon \quad (3.5)$$

se t_1 e t_2 pertencem a uma mesma parte π_i .

Seja $\psi(\cdot)$ uma função definida em P_ε , constante em cada parte π_i e que difere de $\dot{\bar{x}}(\cdot)$ numa quantidade inferior a $\frac{1}{12} H_\varepsilon$:

$$\psi(t) = c_i \quad \text{para todo o } t \in \pi_i \quad (3.6)$$

$$|\dot{\bar{x}}(t) - \psi(t)| < \frac{1}{12} H_\varepsilon. \quad (3.7)$$

Designemos por $\tilde{\pi}_i$, $i = 1, 2, 3, \dots, p$, p intervalos contendo respectivamente as partes $\pi_i : \tilde{\pi}_i \supset \pi_i$. Suponhamos

$$\pi_i = \tilde{\pi}_i \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} \delta_{ij},$$

com δ_{ij} intervalos sem pontos comuns dois a dois.

Seja η_i uma quantidade positiva tal que

$$(N_{c_i} + |c_i|) \eta_i < \frac{\varepsilon h_\varepsilon}{24p}. \quad (3.8)$$

Designemos, por último, k_i como sendo um inteiro positivo verificando a desigualdade

$$\sum_{j=k_i}^{\infty} m(\delta_{ij}) < \eta_i. \quad (3.9)$$

Com estas convenções, construamos no intervalo $]0, 1[$ uma função $\tilde{\psi}(\cdot)$

$$\tilde{\psi}(t) = c_i \quad \text{para } t \in \pi_i \text{ ou } t \in \delta_{ij}, j \geq k_i, \quad (3.10)$$

$$\tilde{\psi}(t) = 0 \quad \text{para os outros valores de } t. \quad (3.11)$$

Temos que

$$|\tilde{\psi}(t)| < R_\varepsilon. \quad (3.12)$$

Estabeleçamos

$$\bar{x}(t) = \int_0^t \tilde{\psi}(t) dt + x_0. \quad (3.13)$$

Demonstremos em primeiro lugar que temos

$$|\bar{x}(t) - x(t)| < \frac{1}{4} \varepsilon h_\varepsilon. \quad (3.14)$$

Com efeito, das condições $\bar{x}(0) = x_0$ e (3.13), temos que

$$\begin{aligned} |\bar{x}(t) - \bar{x}(t)| &= \left| \int_0^t \tilde{\psi}(t) dt - \int_0^t \dot{\bar{x}}(t) dt \right| \leq \\ &\leq \int_{P_\varepsilon} |\tilde{\psi}(t) - \dot{\bar{x}}(t)| dt + \int_{CP_\varepsilon} |\dot{\bar{x}}(t)| dt + \int_{CP_\varepsilon} |\tilde{\psi}(t)| dt. \end{aligned}$$

Consideremos cada um destes integrais. Temos, segundo (3.7) e da definição de H_ε , que

$$\int_{P_\varepsilon} |\tilde{\psi}(t) - \dot{\bar{x}}(t)| dt < \frac{1}{12} H_\varepsilon \leq \frac{\varepsilon h_\varepsilon}{12}. \quad (3.15)$$

Após a construção do conjunto P_ε (quarta condição) temos que

$$\int_{CP_\varepsilon} |\dot{\bar{x}}(t)| dt < \frac{\varepsilon h_\varepsilon}{12}. \quad (3.16)$$

Por último, das condições (3.10), (3.11), (3.9) e (3.8), segue-se

$$\int_{CP_\varepsilon} |\tilde{\psi}(t)| dt \leq \sum_{i=1}^p \left(|c_i| \cdot \sum_{j=k_i}^{\infty} m(\delta_{ij}) \right) < \sum_{i=1}^p |c_i| \eta_i < \frac{\varepsilon h_\varepsilon}{12}. \quad (3.17)$$

A desigualdade procurada é uma consequência imediata das três últimas desigualdades: (3.15), (3.16) e (3.17).

Demonstremos agora que

$$\Delta = \left| \int_0^1 L(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t)) dt - \int_0^1 L(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t)) dt \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.18)$$

Com efeito, temos em primeiro lugar que

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \left| \int_0^1 L(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t)) dt - \int_0^1 L(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t)) dt \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{P_\varepsilon} [L(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t)) - L(t, \bar{x}(t), \tilde{\psi}(t))] dt \right| + \end{aligned}$$

$$+ \left| \int_{CP_\varepsilon} L(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t)) dt \right| + \left| \int_{CP_\varepsilon} L(t, \bar{x}(t), \tilde{\psi}(t)) dt \right|$$

e das desigualdades (3.7) e (3.4) segue-se

$$\left| \int_{P_\varepsilon} \left[L(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t)) - L(t, \bar{x}(t), \tilde{\psi}(t)) \right] dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{12}.$$

Por outro lado, segundo a condição 3

$$\left| \int_{CP_\varepsilon} L(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t)) dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{12}.$$

Por último, da condição 1 e das desigualdades (3.8) e (3.9) temos que

$$\begin{aligned} & \left| \int_{CP_\varepsilon} L(t, \bar{x}(t), \tilde{\psi}(t)) dt \right| \leq \\ & \leq N_0 \cdot m(CP_\varepsilon) + \sum_{i=1}^p \left(N_{c_i} + \sum_{j=k_i}^{\infty} m(\delta_{ij}) \right) \leq \\ & \leq \frac{\varepsilon}{24} + \frac{\varepsilon}{24} = \frac{\varepsilon}{12}. \end{aligned}$$

Temos, por conseguinte, $\Delta_1 \leq \frac{\varepsilon}{4}$.

Por outro lado temos por hipótese que $\left| \frac{\partial L}{\partial x} \right| \leq M$. Segue-se então da desigualdade (3.14) que

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \left| \int_0^1 L(t, \bar{x}(t), \tilde{\psi}(t)) dt - \int_0^1 L(t, \bar{\bar{x}}(t), \tilde{\psi}(t)) dt \right| \leq \\ &\leq \int_0^1 M |\bar{x}(t) - \bar{\bar{x}}(t)| dt \leq \frac{\varepsilon}{4}. \end{aligned}$$

Temos deste modo

$$\Delta \leq \Delta_1 + \Delta_2 \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Propomo-nos agora construir $\hat{x}(\cdot)$ tal que

$$|\hat{x}(t) - \bar{x}(t)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (3.19)$$

$$\left| \int_0^1 L(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t)) dt - \int_0^1 L(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) dt \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (3.20)$$

$$\hat{x}(0) = x_0, \quad \hat{x}(1) = x_1. \quad (3.21)$$

Em virtude de (3.14) e (3.18), vemos que $\hat{x}(\cdot)$ é a função procurada.

Notamos agora que, qualquer que seja $\varepsilon < \frac{1}{2}$, existe sempre³ um conjunto E que é a reunião de um número finito de intervalos, cuja medida é igual a $\frac{1}{2}$ e tal que

$$|\tilde{\psi}(t)| < R + 1 \quad \text{para todo } t \in E. \quad (3.22)$$

Se fizermos

$$\bar{\bar{x}}(1) - \bar{x}(1) = \varepsilon_1 \quad (3.23)$$

de (3.14) temos que

$$|\varepsilon_1| < \frac{1}{4} h_\varepsilon \varepsilon. \quad (3.24)$$

Seja $\bar{\psi}(\cdot)$ uma função verificando as condições:

$$\bar{\psi}(t) = \tilde{\psi}(t) \quad \text{para todo } t \in CE \quad (3.25)$$

³ Para provar a existência de um tal conjunto, é suficiente recordar que:

$$P \subset P_\varepsilon$$

$$m(P) = \frac{1}{2}$$

$$\tilde{\psi}(\cdot) \text{ é contínua em } [0, 1] \text{ e}$$

$$|\dot{\bar{x}}(t) - \tilde{\psi}(t)| < \frac{1}{12} H_\varepsilon.$$

$$\bar{\psi}(t) = \tilde{\psi}(t) + 2\varepsilon_1 \quad \text{para todo } t \in E. \quad (3.26)$$

Para obter a função $\hat{x}(\cdot)$ procurada, é suficiente fazer

$$\hat{x}(t) = \int_0^t \bar{\psi}(t) dt + x_0. \quad (3.27)$$

Com efeito, vem de (3.13), (3.25) e (3.26) que

$$|\hat{x}(t) - \bar{x}(t)| \leq \varepsilon_1 \quad (3.28)$$

e temos além disso, por um lado e como resulta de (3.25), (3.26), (3.24) e (3.3), que

$$\begin{aligned} \Delta'_1 &= \left| \int_0^1 L(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t)) dt - \int_0^1 L(t, \bar{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) dt \right| = \\ &= \left| \int_E L(t, \bar{x}(t), \tilde{\psi}(t)) dt - \int_E L(t, \bar{x}(t), \tilde{\psi}(t)) dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{4}; \end{aligned}$$

e por outro lado, em virtude das condições (3.28) e (3.24) e da hipótese $\left| \frac{\partial L}{\partial x} \right| < M$, que

$$\Delta'_2 = \left| \int_0^1 L(t, \bar{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) dt - \int_0^1 L(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

Obtemos a desigualdade (3.20) somando Δ'_1 a Δ'_2 .

A desigualdade (3.19) e a expressão (3.21) são consequências imediatas respectivamente das expressões (3.28), (3.24) e (3.27), (3.26), (3.24), (3.23). ■

Deduzimos deste resultado os dois teoremas seguintes.

Teorema 44 Sendo $L(\cdot, \cdot, \cdot)$ uma função contínua, diferenciável em x e tal que $\left| \frac{\partial L}{\partial x} \right| < M$, o ínfimo do integral $\int_0^1 L(t, x(t), \dot{x}(t)) dt$ na classe AC é igual ao ínfimo do mesmo integral na classe C^1 . ■

Teorema 45 *Se existir na classe C^1 uma curva que minimiza o integral*

$$\int_0^1 L(t, x(t), \dot{x}(t)) dt$$

em que $L(\cdot, \cdot, \cdot)$ verifica as condições do Teorema 43, existe também um minimizante para esse integral na classe AC e este último mínimo é atingido pela mesma curva. ■

3.2.3 Regularidade C^2

Vamos usar a equação de Euler na forma integral para provar que sob algumas hipóteses, qualquer solução C^1 da equação de Euler é na realidade da classe C^2 . Provamos depois, à custa deste resultado, a regularidade das extremais de duBois-Reymond quando o Lagrangeano $L(\cdot, \cdot, \cdot)$ satisfaz uma condição de elipticidade apropriada.

Teorema 46 (Weierstrass - continuidade da segunda derivada) *Seja $x(\cdot) \in C^1$ uma extremal de duBois-Reymond de $J[\cdot]$. Suponhamos que $L_v(\cdot, \cdot, \cdot)$ é da classe C^1 em $[a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ e que a matriz Hessiana $L_{vv}(t, x(t), \dot{x}(t))$ é invertível para todo o $t \in]a, b[$. Então $x(\cdot)$ é da classe C^2 em $]a, b[$.*

Prova: como $x(\cdot)$ é da classe C^1 , o lado direito

$$\xi(t) = c + \int_a^t L_x(\tau, x(\tau), \dot{x}(\tau)) d\tau \quad (3.29)$$

de (1.12) é da classe C^1 ($[a, b]$) e o lado esquerdo $L_v(t, x(t), \dot{x}(t))$ é contínuo em $[a, b]$. Obtemos assim que

$$L_v(t, x(t), \dot{x}(t)) - \xi(t) = 0 \quad \text{para todo } t \in [a, b]. \quad (3.30)$$

Definamos agora a aplicação

$$\gamma(t, v) = L_v(t, x(t), v) - \xi(t), \quad (3.31)$$

que é da classe $C^1([a, b] \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ e satisfaz

$$\det \gamma_v(t, \dot{x}(t)) \neq 0 \quad \text{para todo } t \in]a, b[.$$

Deduzimos de (3.30) que

$$\gamma(t, \dot{x}(t)) = 0 \quad \text{para todo } t \in [a, b].$$

Então o teorema da função implícita implica que a solução $v(t)$ da equação

$\gamma(t, v) = 0$ é da classe C^1 em $]a, b[$ e $\dot{x}(t) = v(t)$. ■

Observação 47 (Um contra exemplo para o teorema 46) No Exemplo 24 $\hat{x}(\cdot)$ e $\hat{x}(\cdot)$ são contínuas mas $\hat{\dot{x}}(\cdot)$ é descontínua em $t = 0$. Aqui $L(t, x, v) = x^2(2t - v)^2$ não satisfaz

$$\det L_{vv}(t, \hat{x}(t), \hat{\dot{x}}(t)) \neq 0 \quad \text{para todo } t \in [a, b]$$

com

$$\hat{x}(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } -1 \leq t \leq 0 \\ t^2 & \text{se } 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Com efeito,

$$L_v(t, x, v) = -2x^2(2t - v)$$

$$L_{vv}(t, x, v) = 2x^2$$

e para $t \in [-1, 0]$ temos que $L_{vv}(t, \hat{x}(t), \hat{\dot{x}}(\cdot)) = 0$. □

Teorema 48 Seja $x(\cdot) \in \text{Lip}([a, b], \mathbb{R}^n)$ uma extremal de duBois-Reymond de $J[\cdot]$. Assumamos que $L_v(\cdot, \cdot, \cdot)$ é da classe C^1 em $[a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ e que $L_{vv}(t, x, v)$ é definida positiva para todos os $(t, x, v) \in [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Então $x(\cdot)$ é necessariamente da classe $C^2([a, b], \mathbb{R}^n)$.

Prova: consideremos a aplicação $\Phi : (t, x, v_1) \rightarrow (t, x, v_2)$ de $[a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

em si mesmo que é definida por

$$\Phi(t, x, v_1) = (t, x, L_v(t, x, v_1)). \quad (3.32)$$

Sabemos que (veja-se o teorema 94 em Apêndice) $\Phi(\cdot, \cdot, \cdot)$ produz um difeomorfismo C^1 de $[a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ para a sua imagem $\mathcal{I} = \Phi([a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Denotemos por $\Psi : \mathcal{I} \rightarrow [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ a inversa de $\Phi(\cdot, \cdot, \cdot)$. Inferimos de (1.12) que

$$\Phi(t, x(t), \dot{x}(t)) = (t, x(t), \xi(t)) \quad q.t.p. \text{ em } [a, b], \quad (3.33)$$

onde $\xi(t)$ é definido por (3.29). Façamos $\sigma(t) = (t, x(t), \dot{x}(t))$, $e(t) = (t, x(t), \xi(t))$ e $\Psi(e(t)) = (t, x(t), v(t))$. Então (3.33) é equivalente a $e(t) = \Phi(\sigma(t))$ em $q.t.p.$ de $[a, b]$, de onde

$$\sigma(t) = \Psi(e(t)) \quad q.t.p. \text{ de } [a, b], \quad (3.34)$$

isto é,

$$\dot{x}(t) = v(t) \quad q.t.p. \text{ de } [a, b]. \quad (3.35)$$

Uma vez que $x(\cdot) \in Lip([a, b], \mathbb{R}^n)$, existe $k \geq 0$ e um conjunto de medida nula \mathcal{N} em $[a, b]$, tal que $\dot{x}(\cdot)$ está definida em $[a, b] \setminus \mathcal{N}$ e

$$\|\dot{x}(t)\| \leq k \quad \text{para } t \in [a, b] \setminus \mathcal{N}. \quad (3.36)$$

Já que $e(t) = \Phi(\sigma(t))$ em $q.t.p.$ de $[a, b]$ podemos assumir (se necessário podemos sempre “aumentar” \mathcal{N}) que

$$e(t) = \Phi(\sigma(t)) \quad \text{para } t \in [a, b] \setminus \mathcal{N}. \quad (3.37)$$

Seja $\mathcal{H} = \{\Phi(t, x, v) : (t, x, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \text{ e } \|v\| \leq k\}$. Então (3.36) implica que

$$\Phi(\sigma(t)) \in \mathcal{H} \quad \text{para } t \in [a, b] \setminus \mathcal{N}, \quad (3.38)$$

e tendo em conta (3.37) segue-se que

$$e(t) \in \mathcal{H} \quad \text{para } t \in [a, b] \setminus \mathcal{N}. \quad (3.39)$$

Uma vez que $e(\cdot)$ é contínua em $[a, b]$ e \mathcal{H} é fechado, deduzimos de (3.39) que⁴

$$e(t) \in \mathcal{H} \quad \text{para todo } t \in [a, b], \quad (3.40)$$

e portanto $e([a, b])$ está contido em \mathcal{I} , o domínio de $\Psi(\cdot, \cdot, \cdot)$. Em virtude de $\Psi(\cdot, \cdot, \cdot) \in C^1$ vemos que $(\Psi \circ e)(\cdot)$ é contínua e, se assim é, $v(\cdot)$ é contínua em $[a, b]$. Por outro lado, por (3.35), a função absolutamente contínua $x(\cdot)$ pode ser representada na forma

$$x(t) = x(a) + \int_a^t v(\tau) d\tau.$$

Consequentemente $x(\cdot)$ é da classe C^1 em $[a, b]$ e o *Teorema 46* dá-nos que $x(\cdot)$ é mesmo da classe C^2 em (a, b) . Na verdade, (3.33) implica que $\xi(\cdot) \in C^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ e então da relação (3.34) vem que $\dot{x}(\cdot) \in C^1([a, b], \mathbb{R}^n)$, i.e., $x(\cdot) \in C^2([a, b], \mathbb{R}^n)$. ■

3.3 Fenómeno de Lavrentiev

O *fenómeno de Lavrentiev* está relacionado com a questão de quando o ínfimo de uma funcional no espaço das funções absolutamente contínuas, é estritamente

⁴ Com efeito, suponhamos que $\exists \bar{t} \in [a, b]$ tal que $e(\bar{t}) \notin \mathcal{H}$, i.e., $\exists \varepsilon > 0 : B(e(\bar{t}); \varepsilon) \cap \mathcal{H} = \emptyset$. Então, pela continuidade de $e(\cdot)$,

$$\exists \delta > 0 : |t - \bar{t}| < \delta \Rightarrow \|e(t) - e(\bar{t})\| < \varepsilon.$$

Tínhamos então um conjunto de t 's de medida não nula para os quais $e(t) \notin \mathcal{H}$. Isto entra em contradição com (3.39).

menor que o ínfimo da mesma funcional na classe C^1 ou Lip .

Na demonstração do Teorema 43 e, como consequência, do teorema 44, foi suposto que a derivada de $L(t, x, \dot{x})$ em relação a x é limitada. É interessante saber se esta condição é necessária. Dito de outra maneira, o teorema subsistirá se não supusermos mais que $\left| \frac{\partial L}{\partial x} \right| < M$? E para o caso de esta questão se responder negativamente, é possível substituir essa restrição pela hipótese de todas as derivadas parciais de $L(\cdot, \cdot, \cdot)$ até uma certa ordem existirem e forem contínuas? Estas duas questões têm resposta negativa.

A primeira observação de que o ínfimo de uma funcional na classe das funções absolutamente contínuas, pode ser estritamente menor que o ínfimo da mesma funcional em C^1 , é devida a Lavrentiev [21]. O exemplo que apresentamos é devido a Manià [23].

Lema 49 *Seja $0 < \alpha < \beta < 1$ e*

$$\mathcal{W} = \left\{ x(\cdot) \in Lip([\alpha, \beta]) : \frac{1}{4} t^{1/3} \leq x(t) \leq \frac{1}{2} t^{1/3} \right. \\ \left. \forall t \in [\alpha, \beta]; \quad x(\alpha) = \frac{1}{4} \alpha^{1/3}, x(\beta) = \frac{1}{2} \beta^{1/3} \right\}.$$

Se

$$J[x(\cdot)] = \int_{\alpha}^{\beta} \left(t - x(t)^3 \right)^2 \dot{x}(t)^6 dt$$

então

$$J[x(\cdot)] \geq \frac{c_0}{\beta}$$

para todo o $x(\cdot) \in \mathcal{W}$ e para $c_0 = 7^2 3^5 2^{-18} 5^{-5}$.

□

Teorema 50 *Seja*

$$J[x(\cdot)] = \int_0^1 \left(t - x(t)^3 \right)^2 \dot{x}(t)^6 dt.$$

Se

$$\mathcal{W}_1 = \{x(\cdot) \in Lip([0, 1]) : x(0) = 0, x(1) = 1\}$$

$$\mathcal{W}_2 = \{x(\cdot) \in AC([0, 1]) : x(0) = 0, x(1) = 1\}$$

Então

$$\inf_{x(\cdot) \in \mathcal{W}_1} J[x(\cdot)] \geq \frac{7^2 3^5}{2^{18} 5^5} = c_0 > 0 = \inf_{x(\cdot) \in \mathcal{W}_2} J[x(\cdot)].$$

Além disso, o mínimo de $J[\cdot]$ em \mathcal{W}_2 é atingido por $\hat{x}(t) = t^{1/3}$. □

Prova do Lema 49: Uma vez que $x(t) \leq \frac{1}{2} t^{1/3}$ temos que

$$1 - \frac{x(t)^3}{t} \geq 1 - \frac{1}{t} \left(\frac{t^{1/3}}{2} \right)^3 = \frac{7}{2^3}, \quad \text{para todo } t \in [\alpha, \beta].$$

Consequentemente,

$$J[x(\cdot)] = \int_{\alpha}^{\beta} t^2 \left(1 - \frac{x(t)^3}{t} \right)^2 \dot{x}(t)^6 dt \geq \frac{7}{2^3} \int_{\alpha}^{\beta} t^2 \dot{x}(t)^6 dt. \quad (3.41)$$

Fazendo

$$\tau = t^{3/5} \text{ e } x(t) = \tilde{x}(\tau) = \tilde{x}(t^{3/5})$$

deduzimos imediatamente que

$$\dot{x}(t) = \dot{\tilde{x}}(\tau) \frac{d\tau}{dt} = \frac{3}{5} \dot{\tilde{x}}(\tau) t^{-2/5} = \frac{3}{5} \dot{\tilde{x}}(\tau) \tau^{-2/3}.$$

Voltando a (3.41) temos

$$\begin{aligned} J[x(\cdot)] &\geq \frac{7^2}{2^6} \int_{\alpha^{3/5}}^{\beta^{3/5}} \tau^{10/3} \left(\frac{3}{5} \dot{\tilde{x}}(\tau) \tau^{-2/3} \right)^6 \left(\frac{5}{3} \tau^{2/3} \right) d\tau \geq \\ &\geq \frac{7^2 3^5}{2^6 5^5} \int_{\alpha^{3/5}}^{\beta^{3/5}} (\dot{\tilde{x}}(\tau))^6 d\tau. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Hölder (*vide* Corolário 78 em Apêndice, relativamente ao qual fazemos $f(\tau) = \dot{x}(\tau)$, $g(\tau) = 1$, $p = \frac{1}{6}$, $q = \frac{5}{6}$, $a = \alpha^{3/5}$ e $b = \beta^{3/5}$) obtemos:

$$\begin{aligned} \int_{\alpha^{3/5}}^{\beta^{3/5}} \dot{x}(\tau) d\tau &\leq \left[\int_{\alpha^{3/5}}^{\beta^{3/5}} (\dot{x}(\tau))^6 d\tau \right]^{1/6} \cdot \left[\int_{\alpha^{3/5}}^{\beta^{3/5}} 1^{6/5} d\tau \right]^{5/6} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(\tilde{x}(\beta^{3/5}) - \tilde{x}(\alpha^{3/5}) \right)^6 &\leq \int_{\alpha^{3/5}}^{\beta^{3/5}} (\dot{x}(\tau))^6 d\tau \cdot (\beta^{3/5} - \alpha^{3/5})^5 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \int_{\alpha^{3/5}}^{\beta^{3/5}} (\dot{x}(\tau))^6 d\tau &\geq \frac{\left(\tilde{x}(\beta^{3/5}) - \tilde{x}(\alpha^{3/5}) \right)^6}{(\beta^{3/5} - \alpha^{3/5})^5}. \end{aligned}$$

Deste modo, podemos escrever que

$$\begin{aligned} J[x(\cdot)] &\geq \frac{7^2 3^5}{2^6 5^5} \frac{\left(\tilde{x}(\beta^{3/5}) - \tilde{x}(\alpha^{3/5}) \right)^6}{(\beta^{3/5} - \alpha^{3/5})^5} = \frac{7^2 3^5}{2^6 5^5} \frac{\left(\frac{1}{2}\beta^{1/3} - \frac{1}{4}\alpha^{1/3} \right)^6}{(\beta^{3/5} - \alpha^{3/5})^5} \quad (3.42) \\ &\geq \frac{7^2 3^5}{2^{12} 5^5} \frac{\beta^2 \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{1/3} \right)^6}{\beta^3 \left(1 - \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{3/5} \right)^5}. \end{aligned}$$

Observemos finalmente que uma vez que $0 < \alpha < \beta$,

$$\left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{1/3} \right)^6 \geq \left(\frac{1}{2} \right)^6 \quad \text{e} \quad \left(1 - \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{3/5} \right)^{-5} \geq 1. \quad (3.43)$$

Combinando (3.42) e (3.43) obtemos a veracidade do lema. ■

Prova do Teorema 50: Vamos provar em primeiro lugar que se $x(\cdot) \in \mathcal{W}_1$ então existe $0 < \alpha < \beta < 1$ tal que $x(\cdot) \in \mathcal{W}$ (\mathcal{W} como no Lema 49), i.e.,

$$\begin{cases} x(\alpha) = \frac{1}{4}\alpha^{1/3}, \quad x(\beta) = \frac{1}{2}\beta^{1/3} \\ \frac{1}{4}t^{1/3} \leq x(t) \leq \frac{1}{2}t^{1/3}, \text{ para todo } t \in [\alpha, \beta] \end{cases} \quad (3.44)$$

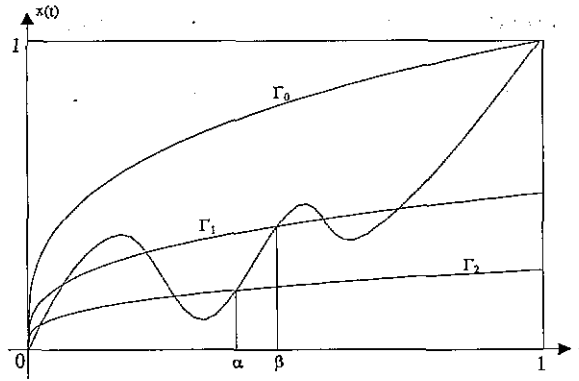


Figura 3.6 $\Gamma_i = \{(t, \varepsilon_i t^{1/3}) : t \in [0, 1]\}$, $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}$, $\varepsilon_2 = \frac{1}{4}$.

A existência de um tal α e β é facilmente compreendida (veja-se a figura 3.6).

Seja

$$A = \left\{ a \in]0, 1[: x(a) = \frac{1}{4} a^{1/3} \right\}$$

$$B = \left\{ b \in]0, 1[: x(b) = \frac{1}{2} b^{1/3} \right\}.$$

Uma vez que $x(\cdot)$ é localmente lipschitziano, $x(0) = 0$ e $x(1) = 1$, segue-se que $A \neq \emptyset$ e $B \neq \emptyset$. Escolhamos, por exemplo,

$$\alpha = \max \{ a : a \in A \}$$

$$\beta = \min \{ b : b \in B \text{ e } b > \alpha \}.$$

Resulta então claro que α e β satisfazem (3.44).

Podemos, por conseguinte, usar o lema 49 para deduzir que

$$J[x(\cdot)] = \int_0^1 (t - x(t)^3)^2 \dot{x}(t)^6 dt \geq \int_\alpha^\beta (t - x(t)^3)^2 \dot{x}(t)^6 dt \geq \frac{c_0}{\beta} > c_0 > 0.$$

O facto de que $\hat{x}(t) = t^{1/3}$ minimiza $J[\cdot]$ sobre \mathcal{W}_2 é indubitável uma vez que $L(t, x, v) \geq 0$ para todo o $(t, x, v) \in \mathbb{R}^3$, o que implica que $J[x(\cdot)] \geq 0$. Ora $J[\hat{x}(\cdot)] = 0$. ■

Parte Original

*“A capacidade de criação é o
dom supremo que a Natureza
deu ao Homem.”*

Engelgardt

(citado por Viktor Pekelis em *Conheça as suas potencialidades*, ed. Mir, 1988, p. 58)

Capítulo 4

Abordagem Hamiltoniana à Regularidade

Demonstra-se, usando uma abordagem Hamiltoniana no contexto da Teoria do Controlo Ótimo, um teorema de regularidade Lipschitziana para problemas do Cálculo das Variações de ordem arbitrária.

4.1 Um teorema de Regularidade Lipschitziana

Seja $L(\cdot, \cdot, \cdot)$ uma função de valor real em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ com $n \geq 1$; sejam $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$ e $z_a, z_b \in \mathbb{R}^n$. Conhecidos estes dados, considere-se o problema básico do Cálculo das Variações¹ :

$$J[z(\cdot)] = \int_a^b L(\tau, z(\tau), \dot{z}(\tau)) d\tau \longrightarrow \min$$

$$z(\cdot) \in W_{1,1}([a, b], \mathbb{R}^n) \tag{P_1}$$

$$z(a) = z_a \quad , \quad z(b) = z_b.$$

¹ $W_{1,1}([a, b], \mathbb{R}^n)$ representa o espaço constituído por todas as funções z de $[a, b]$ em \mathbb{R}^n absolutamente contínuas, i.e., o espaço das funções $z(\cdot)$ diferenciáveis em quase todos os pontos de $[a, b]$ e com $\dot{z}(\cdot)$ integrável - $\dot{z}(\cdot) \in L_1([a, b], \mathbb{R}^n)$.

Teorema 51 *Se forem satisfeitas as hipóteses:*

(H1) $L(\cdot, \cdot, \cdot) \in C^1$, i.e., $L(\cdot, \cdot, \cdot)$ é diferenciável com continuidade nos seus argumentos;

(H2) ² Existe $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$L(\tau, z, u) \geq \theta(\|u\|) > \zeta > 0,$$

para todo o $(\tau, z, u) \in [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, e

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{r}{\theta(r)} = 0;$$

(H3) O lagrangeano $L(\cdot, \cdot, \cdot)$ verifica a seguinte condição de crescimento: existem constantes γ, β, η e μ , com $\gamma > 0$, $\beta < 2$ e $\mu \geq \max\{\beta - 1, -1\}$, tais que para todo o $\tau \in [a, b]$, e $z, u \in \mathbb{R}^n$

$$(|L_{z^i}(\tau, z, u)| + |L_\tau(\tau, z, u)|) \|u\|^\mu \leq \gamma L^\beta(\tau, z, u) + \eta,$$

$$i \in \{1, \dots, n\}$$

onde

$$L_{z^i}(\tau, z, u) = \frac{\partial L(\tau, z, u)}{\partial z^i};$$

Então qualquer solução $\tilde{z}(\cdot) \in W_{1,1}([a, b], \mathbb{R}^n)$ de (P_1) , é na verdade Lipschitziana em $[a, b]$, i.e., $\tilde{z}(\cdot) \in W_{1,\infty}([a, b], \mathbb{R}^n)$. \square

Antes de procedermos à demonstração deste resultado, mostramos um exemplo em que as condições de regularidade Lipschitziana conhecidas não são satisfeitas enquanto as hipóteses do Teorema 51 o são:

Exemplo 52 *Consideremos o seguinte problema ($n = 1$):*

$$J[x(\cdot)] = \int_0^1 \left[(\dot{x}^4 + 1)^3 e^{(\dot{x}^4 + 1)(t + \frac{\pi}{2} - \arctan x)} \right] dt \rightarrow \min$$

$$x(\cdot) \in AC$$

² O requerimento de positividade do lagrangeano, pode ser simplesmente substituído pela exigência de que ele seja limitado inferiormente. Com efeito, dois problemas (P_1) são equivalentes se a diferença das funções integrandas for constante.

$$x(0) = x_0, \quad x(1) = x_1.$$

Temos

$$L(t, x, v) = (v^4 + 1)^3 e^{(v^4 + 1)(t + \frac{\pi}{2} - \arctan x)},$$

$$L_t(t, x, v) = (v^4 + 1) L(t, x, v),$$

$$L_x(t, x, v) = -\frac{v^4 + 1}{1 + x^2} L(t, x, v),$$

$$L_v(t, x, v) = \left[\frac{12v^3}{v^4 + 1} + 4v^3 \left(t + \frac{\pi}{2} - \arctan x \right) \right] L(t, x, v),$$

$$L_{xx}(t, x, v) = \left[2x \frac{v^4 + 1}{(1 + x^2)^2} + \left(\frac{v^4 + 1}{1 + x^2} \right)^2 \right] L(t, x, v),$$

$$L_{vv}(t, x, v) = \left[\frac{36v^2(v^4 + 1) - 48v^6}{(v^4 + 1)^2} + 12v^2 \left(t + \frac{\pi}{2} - \arctan x \right) \right] L(t, x, v) +$$

$$+ \left[\frac{12v^3}{v^4 + 1} + 4v^3 \left(t + \frac{\pi}{2} - \arctan x \right) \right]^2 L(t, x, v) =$$

$$= \left[\frac{132v^6 + 36v^2}{(v^4 + 1)^2} + \left(\frac{96v^6}{v^4 + 1} + 12v^2 \right) \left(t + \frac{\pi}{2} - \arctan x \right) \right] L(t, x, v) +$$

$$+ 16v^6 \left(t + \frac{\pi}{2} - \arctan x \right)^2 L(t, x, v).$$

O Teorema de Tonelli³ assegura-nos a existência de uma solução $\hat{x}(\cdot) \in AC$ para o problema:

- $L(\cdot, \cdot, \cdot) \in C^2$;
- Para todo o triplo $(t, x, v) \in [0, 1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ temos:

$$L(t, x, v) > (v^4 + 1)^3 \geq v^4 + 1 > 0,$$

$$L_{vv}(t, x, v) \geq 0.$$

As hipóteses do nosso teorema são também verificadas:

$$\theta(r) = r^4 + 1,$$

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{r}{\theta(r)} = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{r}{r^4 + 1} = 0,$$

³ Estamos a aplicar o Teorema de Tonelli standard: $x \in \mathbb{R}$ e $\mathcal{X} = AC$.

$$(|L_x(t, x, v)| + |L_t(t, x, v)|) |v|^{1/2} \leq 2 \left(|v|^4\right)^{1/8} (v^4 + 1) L(t, x, v) < \\ < 2 (v^4 + 1)^{9/8} L(t, x, v) = 2 (v^4 + 1)^{33/8} e^{(v^4+1)(t+\frac{\pi}{2}-\arctan x)}$$

e como $L^{3/2}(t, x, v) = (v^4 + 1)^{36/8} e^{3/2(v^4+1)(t+\frac{\pi}{2}-\arctan x)}$, podemos escrever

$$(|L_x(t, x, v)| + |L_t(t, x, v)|) |v|^{1/2} < 2 L^{3/2}(t, x, v) \\ \left(\gamma = 2, \beta = \frac{3}{2}, \eta = 0, \mu = \frac{1}{2}\right).$$

Podemos então afirmar que $\hat{x}(\cdot) \in Lip$.

Reparar que nenhum dos teoremas de regularidade Lipschitziana conhecidos (Teorema 39, §3.2.1) se aplica a este exemplo:

1. O Lagrangeano depende explicitamente de t e por conseguinte a condição (C1) não é verificada;
2. Se (C2) fosse verdadeira tínhamos

$$\frac{L_t(t, x, v)}{L(t, x, v)} \leq k_0 + \frac{k_1(t)}{L(t, x, v)} \Leftrightarrow v^4 + 1 \leq k_0 + \frac{k_1(t)}{L(t, x, v)}$$

o que não é concerteza verdade para v suficientemente grande:

$$\lim_{v \rightarrow +\infty} (v^4 + 1) = +\infty \\ \lim_{v \rightarrow +\infty} \left(k_0 + \frac{k_1(t)}{L(t, x, v)}\right) = k_0;$$

3. Para (C3) ser verdadeira, deveríamos ter ($v > 0, x = 0$)

$$\frac{|L_x(t, 0, v)|}{v^{7/2} L(t, 0, v)} \leq \frac{k_0}{v^{7/2}} + k_1(t) \frac{|L_v(t, 0, v)|}{v^{7/2} L(t, 0, v)} + \frac{k_2(t)}{v^{7/2} L(t, 0, v)} \\ \frac{v^4 + 1}{v^{7/2}} \leq \frac{k_0}{v^{7/2}} + k_1(t) \frac{\frac{12v^3}{v^4+1} + 4v^3(t+\frac{\pi}{2})}{v^{7/2}} + \frac{k_2(t)}{v^{7/2} L(t, 0, v)}$$

o que também não é verdade para v suficientemente grande:

$$\lim_{v \rightarrow +\infty} \frac{v^4 + 1}{v^{7/2}} = +\infty \\ \lim_{v \rightarrow +\infty} \left(\frac{k_0}{v^{7/2}} + k_1(t) \frac{\frac{12v^3}{v^4+1} + 4v^3(t+\frac{\pi}{2})}{v^{7/2}} + \frac{k_2(t)}{v^{7/2} L(t, 0, v)}\right) = 0;$$

4. (C4) também não é verificada: por exemplo

$$L_{xx}(t, -2, 1) = -\frac{4}{25} L(t, -2, 1) < 0,$$

$$L_{vv}(t, -2, 1) > 0$$

e como tal a matriz Hessiana de $L(t, \cdot, \cdot)$ não é semi-definida positiva.

5. Por último, (C5) é violada uma vez que $L_{vv}(t, x, v)$ pode ser nulo: basta fazer $v = 0$. \square

Prova do Teorema 51: A prova é feita usando o paradigma do Controlo Óptimo. Seguindo a abordagem proposta na monografia de R. V. Gamkrelidze [15, Cap. 8], fazemos uma redução do problema (P_1) a um problema autónomo de tempo mínimo,⁴ numa forma tal em que é possível a aplicação do PMP⁵. Esta redução resulta possível porque

$$t(\tau) = \int_a^\tau L(\theta, z(\theta), \dot{z}(\theta)) d\theta, \quad \tau \in [a, b],$$

é uma função em τ absolutamente contínua (*vide* Teorema 65 em Apêndice), estritamente crescente ao longo de uma curva $z(\cdot)$ absolutamente contínua:

$$\frac{dt(\tau)}{d\tau} = L(\tau, z(\tau), \dot{z}(\tau)) \stackrel{\text{por (H2)}}{>} 0.$$

Existe deste modo a função $\tau(\cdot)$, inversa de $t(\cdot)$ no intervalo $[a, b]$, tal que

$$\frac{d\tau(t)}{dt} = \frac{1}{L(\tau(t), z(\tau(t)), \dot{z}(\tau(t)))},$$

o que implica que

$$\frac{dz(\tau(t))}{dt} = \frac{dz(\tau(t))}{d\tau} \cdot \frac{d\tau(t)}{dt} = \frac{\dot{z}(\tau(t))}{L(\tau(t), z(\tau(t)), \dot{z}(\tau(t)))}.$$

⁴ *vide* Apêndice B.

⁵ Princípio do Máximo de Pontryagin.

Reparar que $\tau(\cdot)$ é também absolutamente contínua (pois é diferenciável quase sempre e a derivada é integrável). Deste modo, tomando t como a nova variável independente - tempo, considerando $\tau(t)$ e $x(t) = z(\tau(t))$ como variáveis de estado e $u(t) = \dot{z}(\tau(t))$ como o parâmetro de controlo, podemos escrever o problema (P_1) na forma

$$T \longrightarrow \min$$

$$\begin{cases} \dot{\tau}(t) = \frac{1}{L(\tau(t), x(t), u(t))} \\ \dot{x}(t) = \frac{u(t)}{L(\tau(t), x(t), u(t))} \end{cases}, \quad \begin{matrix} u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \\ \tau(0) = a, \quad \tau(T) = b \\ x(0) = z_a, \quad x(T) = z_b \end{matrix} \quad (4.1)$$

Um dos requisitos à aplicação do PMP é o de que o controlo u seja essencialmente limitado. Ora na situação presente $u(\cdot)$ pertence a L_1 e não a L_∞ . A ideia proposta em [15] é a *compactificação* do espaço de velocidades admissíveis, através da adição, para um dado $\tau \in [a, b]$ e $x \in \mathbb{R}^n$ arbitrários, de $(0, 0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ao conjunto de todas as velocidades admissíveis do problema (4.1). Iremos ver que o conjunto resultante, que denotaremos por $E(\tau, x)$,

$$E(\tau, x) = \{(0, 0)\} \cup \left\{ \left(\frac{1}{L(\tau, x, u)}, \frac{u}{L(\tau, x, u)} \right) : u \in \mathbb{R}^n \right\} \subset \mathbb{R}^{1+n},$$

é um subconjunto compacto de \mathbb{R}^{1+n} . Com efeito, o conjunto $E(\tau, x)$ pode ser representado como a imagem homeomórfica⁶ de uma esfera n -dimensional $S^n \subset \mathbb{R}^{1+n}$. Para este fim, fixemos um ponto $\hat{w} \in S^n$, que designaremos por

⁶ vide Def. 95 em Apêndice.

pólo norte, e consideremos um homeomorfismo, por exemplo a projecção estereográfica⁷

$$\pi : S^n \setminus \{\hat{w}\} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (4.2)$$

sob o qual uma sucessão arbitrária de pontos $w_i \in S^n \setminus \{\hat{w}\}$ que convirja para \hat{w} se torne numa sucessão de pontos $u_i = \pi(w_i) \in \mathbb{R}^n$ convergente para infinito.

As funções

$$w \rightarrow \frac{1}{L(\tau, x, \pi(w))} \quad \text{e} \quad w \rightarrow \frac{\pi(w)}{L(\tau, x, \pi(w))}, \quad (4.3)$$

são contínuas em $S^n \setminus \{\hat{w}\}$, como resulta da continuidade de $L(\cdot, \cdot, \cdot)$ e de $\pi(\cdot)$.

Em virtude da hipótese (H2)

$$\lim_{\|u\| \rightarrow +\infty} \frac{\|u\|}{\theta(\|u\|)} = 0$$

e como $L(\tau, x, u) \geq \theta(\|u\|)$, também

$$\lim_{\|u\| \rightarrow +\infty} \frac{\|u\|}{L(\tau, x, u)} = 0. \quad (4.4)$$

Assim, podemos estender as funções (4.3) a funções $\phi^{\tau, x}(\cdot)$ e $\gamma^{\tau, x}(\cdot)$ que são contínuas em toda a esfera S^n :

$$\phi^{\tau, x}(w) = f(\tau, x, w) = \begin{cases} \frac{1}{L(\tau, x, \pi(w))} & \text{se } w \neq \hat{w} \\ 0 & \text{se } w = \hat{w} \end{cases},$$

$$\gamma^{\tau, x}(w) = g(\tau, x, w) = \begin{cases} \frac{\pi(w)}{L(\tau, x, \pi(w))} & \text{se } w \neq \hat{w} \\ 0 & \text{se } w = \hat{w} \end{cases}.$$

⁷ vide Exemplo 96 em Apêndice.

A aplicação contínua $w \rightarrow (\phi^{\tau, x}(w), \gamma^{\tau, x}(w))$, de S^n em $E(\tau, x)$, é com certeza injectiva⁸ e por conseguinte um homeomorfismo já que S^n é compacto⁹. Deste modo definimos o problema autónomo de controlo óptimo:

$$T \longrightarrow \min \quad (4.5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\tau}(t) = f(\tau(t), x(t), w(t)) \\ \dot{x}(t) = g(\tau(t), x(t), w(t)) \end{array} \right. , \quad \begin{array}{l} w : \mathbb{R} \rightarrow S^n \\ \tau(0) = a \quad , \quad \tau(T) = b \\ x(0) = z_a \quad , \quad x(T) = z_b \end{array} \quad (4.6)$$

que possui o conjunto dos valores admissíveis do parâmetro de controlo, compacto.

Com este mecanismo podemos estabelecer uma correspondência entres curvas absolutamente contínuas

$$z(\tau), \quad a \leq \tau \leq b, \quad z(a) = z_a, \quad z(b) = z_b, \quad (4.7)$$

e as soluções de (4.6)

$$w(t), \tau(t), x(t), \quad \text{com } w(t) \neq \hat{w} \text{ em q.t.p. } t \in [0, T] \quad (4.8)$$

de tal modo que o tempo de transferência T para a solução (4.8) é igual ao valor de $J[z(\cdot)]$,

$$T = J[z(\cdot)] = \int_a^b L(\tau, z(\tau), \dot{z}(\tau)) d\tau.$$

⁸ Se $w_1 \neq w_2$ das duas uma: ou $L(\tau, x, \pi(w_1)) = L(\tau, x, \pi(w_2))$, situação em que $\gamma^{\tau, x}(w_1) \neq \gamma^{\tau, x}(w_2)$, ou então $L(\tau, x, \pi(w_1)) \neq L(\tau, x, \pi(w_2))$ de onde se segue que $\phi^{\tau, x}(w_1) \neq \phi^{\tau, x}(w_2)$.

⁹ vide Teorema 97 em Apêndice.

Definimos a solução (4.8), fazendo

$$w(t) = \pi^{-1}(\dot{z}(\tau(t))), \quad \tau(t), \quad x(t) = z(\tau(t)), \quad 0 \leq t \leq T = J[z(\cdot)],$$

onde $\pi^{-1}(\cdot)$ é a função inversa de (4.2). $x(\cdot)$ é uma função absolutamente contínua já que é obtida por composição de uma função absolutamente contínua por outra absolutamente contínua e estritamente crescente¹⁰:

$$\frac{d\tau}{dt} > 0$$

em quase todos os $t \in [0, T]$. Do facto de $z(\tau(\cdot))$ ser absolutamente contínua, sabemos que a sua derivada $\varphi(t) \in L_1$ e $\dot{z}(\tau(t)) = \varphi(t) L(\tau(t), z(\tau(t)), \dot{z}(\tau(t)))$ é mensurável. Uma vez que $w(\cdot)$ resulta da composição de $\pi^{-1}(\cdot)$ (uma função contínua e por conseguinte Borel-mensurável) com uma função mensurável, concluímos pelo Teorema 99 em Apêndice, que $w(\cdot)$ é mensurável.

Depois destas observações resta-nos diferenciar $x(t)$,

$$\dot{x}(t) = \frac{dz(\tau(t))}{dt} = \frac{dz(\tau(t))}{d\tau} \cdot \frac{d\tau(t)}{dt} = \frac{\pi(w(t))}{L(\tau(t), x(t), \pi(w(t)))},$$

para concluir que $\tau(t)$ e $x(t)$ satisfazem as equações diferenciais (4.6) com $w(t) \neq \hat{w}$ em q.t.p. $t \in [0, T]$.

Vejamos agora que toda a solução (4.8) pode ser obtida com a ajuda desta correspondência. Para isso definamos a curva (4.7) correspondente a uma solução arbitrária (4.8). A função

$$t(\tau), \quad a \leq \tau \leq b,$$

¹⁰vide Teorema 98 em Apêndice.

inversa da função $\tau(t)$, $0 \leq t \leq T$, é absolutamente contínua, uma vez que $w(t) \neq \hat{w}$ para quase todos os $t \in [0, T]$, de tal modo que

$$\frac{d\tau(t)}{dt} = \frac{1}{L(\tau(t), x(t), \pi(w(t)))} > 0.$$

Fazemos

$$z(\tau) = x(t(\tau)), \quad a \leq \tau \leq b.$$

A curva assim definida é absolutamente contínua (já que $x(\cdot)$ e $t(\cdot)$ são absolutamente contínuas e $t(\cdot)$ é monótona) e satisfaz as condições de fronteira

$$z(a) = z_a \quad \text{e} \quad z(b) = z_b.$$

Derivando $z(\tau)$ em ordem a τ concluímos que

$$\frac{dz(\tau)}{d\tau} = \frac{dx(t(\tau))}{dt} = \frac{dx(t(\tau))}{dt} \cdot \frac{dt(\tau)}{d\tau} = \pi(w(t(\tau))), \quad \text{q.t.p. } \tau \in [a, b].$$

Integrando

$$\frac{dz(\tau)}{d\tau} = L(\tau, x(t(\tau)), \pi(w(t(\tau))))$$

com respeito a $d\tau$ de a a b , onde $x(t(\tau))$ e $\pi(w(t(\tau)))$ são substituídas por $z(\tau)$ e $\dot{z}(\tau)$, respectivamente, obtemos que

$$J[z(\cdot)] = \int_a^b L(\tau, z(\tau), \dot{z}(\tau)) d\tau = T.$$

Assim estabelecemos uma correspondência biunívoca entres as soluções do problema (4.5, 4.6) e as do problema (P_1) .

Vamos aplicar o Princípio do Máximo de Pontryagin ao problema (4.5, 4.6) e, para isso, precisamos que as funções $f(\cdot, \cdot, \cdot)$ e $g(\cdot, \cdot, \cdot)$ tenham derivada contínua com respeito aos dois primeiros argumentos¹¹, τ e x . Para $i \in \{1, \dots, n\}$

$$f_{x^i}(\tau, x, w) = \begin{cases} -\frac{L_{z^i}(\tau, x, \pi(w))}{L^2(\tau, x, \pi(w))} & \text{se } w \neq \hat{w} \\ 0 & \text{se } w = \hat{w} \end{cases},$$

$$f_{\tau}(\tau, x, w) = \begin{cases} -\frac{L_{\tau}(\tau, x, \pi(w))}{L^2(\tau, x, \pi(w))} & \text{se } w \neq \hat{w} \\ 0 & \text{se } w = \hat{w} \end{cases},$$

$$g_{x^i}(\tau, x, w) = \begin{cases} -\frac{L_{z^i}(\tau, x, \pi(w))}{L^2(\tau, x, \pi(w))} \pi(w) & \text{se } w \neq \hat{w} \\ 0 & \text{se } w = \hat{w} \end{cases},$$

$$g_{\tau}(\tau, x, w) = \begin{cases} -\frac{L_{\tau}(\tau, x, \pi(w))}{L^2(\tau, x, \pi(w))} \pi(w) & \text{se } w \neq \hat{w} \\ 0 & \text{se } w = \hat{w} \end{cases}.$$

Uma vez que $L(\cdot, \cdot, \cdot) \in C^1$, $L(\tau, x, \pi(w)) > 0$ para todo o triplo $(\tau, x, \pi(w))$ e $\pi(\cdot)$ é uma função contínua, sai de imediato que $f_{x^i}(\tau, x, w)$, $f_{\tau}(\tau, x, w)$, $g_{x^i}(\tau, x, w)$ e $g_{\tau}(\tau, x, w)$ são contínuas para $w \neq \hat{w}$. Temos de garantir que para todo o $(\tau_0, x_0) \in [a, b] \times \mathbb{R}^n$

$$\lim_{\rho((\tau, x, w), (\tau_0, x_0, \hat{w})) \rightarrow 0} \frac{L_{z^i}(\tau, x, \pi(w))}{L^2(\tau, x, \pi(w))} = 0, \quad (4.9)$$

$$\lim_{\rho((\tau, x, w), (\tau_0, x_0, \hat{w})) \rightarrow 0} \frac{L_{\tau}(\tau, x, \pi(w))}{L^2(\tau, x, \pi(w))} = 0, \quad (4.10)$$

$$\lim_{\rho((\tau, x, w), (\tau_0, x_0, \hat{w})) \rightarrow 0} \frac{L_{z^i}(\tau, x, \pi(w))}{L^2(\tau, x, \pi(w))} \|\pi(w)\| = 0. \quad (4.11)$$

¹¹Um Princípio do máximo sob condições menos restritivas aparece em [5] e [31].

$$\lim_{\rho((\tau, x, w), (\tau_0, x_0, \hat{w})) \rightarrow 0} \frac{L_\tau(\tau, x, \pi(w))}{L^2(\tau, x, \pi(w))} \|\pi(w)\| = 0, \quad (4.12)$$

onde $\rho(\cdot, \cdot)$ é uma distância definida em $[a, b] \times \mathbb{R}^n \times S^n$. Vejamos que tanto (4.9) como (4.10), (4.11) e (4.12) são verdadeiras dadas as nossas hipóteses. Por (H3), sabemos que para todo o $\tau \in [a, b]$, e $z, u \in \mathbb{R}^n$

$$|F(\tau, z, u)| \|u\|^\mu \leq \gamma L^\beta(\tau, z, u) + \eta,$$

onde

$$F(\tau, z, u) = L_{z^i}(\tau, z, u) \text{ com } i \in \{1, \dots, n\}, \text{ ou } F(\tau, z, u) = L_\tau(\tau, z, u).$$

Por conseguinte, podemos escrever

$$\frac{|F(\tau, x, \pi(w))|}{L^2(\tau, x, \pi(w))} \|\pi(w)\|^\mu \leq \gamma \frac{1}{L^{2-\beta}(\tau, x, \pi(w))} + \eta \frac{1}{L^2(\tau, x, \pi(w))}.$$

De (H2) sabemos que

$$\frac{1}{L(\tau, x, \pi(w))} \leq \frac{1}{\theta(\|\pi(w)\|)}$$

o que nos permite afirmar, pelo facto de $2 - \beta > 0$, que

$$\frac{|F(\tau, x, \pi(w))|}{L^2(\tau, x, \pi(w))} \|\pi(w)\|^\mu \leq \gamma \frac{1}{\theta^{2-\beta}(\|\pi(w)\|)} + \eta \frac{1}{\theta^2(\|\pi(w)\|)}. \quad (4.13)$$

Notando agora que quando $\rho((\tau, x, w), (\tau_0, x_0, \hat{w}))$ tende a zero, $\|\pi(w)\|$ vai tendendo necessariamente para infinito:

$$\lim_{\rho((\tau, x, w), (\tau_0, x_0, \hat{w})) \rightarrow 0} \frac{|F(\tau, x, \pi(w))|}{L^2(\tau, x, \pi(w))} \leq$$

$$\leq \gamma \lim_{\rho((\tau, x, w), (\tau_0, x_0, \hat{w})) \rightarrow 0} \frac{\|\pi(w)\|^{-\mu}}{\theta^{2-\beta} (\|\pi(w)\|)} + \eta \lim_{\rho((\tau, x, w), (\tau_0, x_0, \hat{w})) \rightarrow 0} \frac{\|\pi(w)\|^{-\mu}}{\theta^2 (\|\pi(w)\|)}$$

e lembrando que

$$\lim_{\|\pi(w)\| \rightarrow +\infty} \frac{\|\pi(w)\|}{\theta (\|\pi(w)\|)} = 0,$$

$\mu > -1 \Leftrightarrow -\mu < 1$, $\mu > \beta - 1 \Leftrightarrow -\mu < 1 - \beta < 2 - \beta$ e $2 - \beta > 0$, segue-se que

$$\lim_{\rho((\tau, x, w), (\tau_0, x_0, \hat{w})) \rightarrow 0} \frac{|F(\tau, x, \pi(w))|}{L^2(\tau, x, \pi(w))} \leq 0. \quad (4.14)$$

De modo análogo,

$$\begin{aligned} & \lim_{\rho((\tau, x, w), (\tau_0, x_0, \hat{w})) \rightarrow 0} \frac{|F(\tau, x, \pi(w))|}{L^2(\tau, x, \pi(w))} \|\pi(w)\| \leq \\ & \leq \gamma \lim_{\rho((\tau, x, w), (\tau_0, x_0, \hat{w})) \rightarrow 0} \frac{\|\pi(w)\|^{1-\mu}}{\theta^{2-\beta} (\|\pi(w)\|)} + \eta \lim_{\rho((\tau, x, w), (\tau_0, x_0, \hat{w})) \rightarrow 0} \frac{\|\pi(w)\|^{1-\mu}}{\theta^2 (\|\pi(w)\|)}. \end{aligned}$$

Como $\mu > \beta - 1 \Leftrightarrow 1 - \mu < 2 - \beta$ e $\mu > -1 \Leftrightarrow 1 - \mu < 2$, concluímos que

$$\lim_{\rho((\tau, x, w), (\tau_0, x_0, \hat{w})) \rightarrow 0} \frac{|F(\tau, x, \pi(w))|}{L^2(\tau, x, \pi(w))} \|\pi(w)\| \leq 0. \quad (4.15)$$

Resulta de (4.14) a veracidade das igualdades (4.9) e (4.10), enquanto (4.11) e (4.12) estão expressas em (4.15).

Vamos agora aplicar o Princípio do Máximo de Pontryagin para o caso autónomo¹²:

Seja

$$\tilde{u}(t) \in \Omega_U, \quad \tilde{x}(t), \quad a \leq t \leq \tilde{T},$$

a solução do problema de tempo mínimo autónomo

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F(x, u), \quad u(t) \in \Omega_U, \\ x(a) &= x_a, \quad x(T) = x_b \quad T \rightarrow \min. \end{aligned} \quad (4.16)$$

¹²Veja-se o Apêndice B, §B.1.

Então, existe uma função absolutamente contínua, não nula,

$$\psi(t) = (\psi_1(t), \dots, \psi_n(t)), \quad a \leq t \leq \tilde{T},$$

tal que, para quase todos os t no intervalo $a \leq t \leq \tilde{T}$, o sistema de funções $\tilde{x}(t)$, $\psi(t)$ e $\tilde{u}(t)$ satisfazem:

- o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} &= \frac{\partial}{\partial \psi} H(x, \psi, u) \\ \dot{\psi} &= -\frac{\partial}{\partial x} H(x, \psi, u) \end{cases}, \quad (4.17)$$

onde

$$H(x, \psi, u) = \langle \psi, F(x, u) \rangle; \quad (4.18)$$

- a condição do máximo

$$H(\tilde{x}(t), \psi(t), \tilde{u}(t)) = \sup_{u \in U} H(\tilde{x}(t), \psi(t), u) = M(\tilde{x}(t), \psi(t)), \quad (4.19)$$

para quase todos os $t \in [a, \tilde{T}]$; e

- $M(\tilde{x}(\cdot), \psi(\cdot))$ é identicamente igual a uma constante não negativa:

$$M(\tilde{x}(t), \psi(t)) \equiv \text{const} \geq 0, \quad a \leq t \leq \tilde{T}. \quad (4.20)$$

Qualquer solução $(x(t), \psi(t), u(t))$, do sistema (4.17)-(4.20) com $\psi(t)$ não nulo, satisfazendo as condições de fronteira

$$x(a) = x_a, \quad x(b) = x_b \quad (4.21)$$

será chamada *extremal de Pontryagin do problema de tempo mínimo* (4.16). O princípio do máximo afirma que qualquer solução deste problema está contida entre as suas extremais.

Para o nosso sistema autónomo com controlos limitados (4.5, 4.6), sabemos então que existem funções absolutamente contínuas no intervalo $[0, \tilde{T}]^{13}$

$$\psi_\tau(\cdot), \psi_x(\cdot),$$

não ambas nulas, que verificam o sistema

$$\begin{cases} \dot{\psi}_\tau(t) = -H_\tau(\tau(t), x(t), \psi_\tau(t), \psi_x(t), w(t)) \\ \dot{\psi}_x(t) = -H_x(\tau(t), x(t), \psi_\tau(t), \psi_x(t), w(t)) \end{cases},$$

com

$$H(\tau, x, \psi_\tau, \psi_x, w) = \psi_\tau \cdot f(\tau, x, w) + \langle \psi_x, g(\tau, x, w) \rangle.$$

Para todo o $t \in [0, \tilde{T}]$, a condição do máximo permite-nos escrever

$$0 \leq c = \sup_{w \in S^n} \{ \psi_\tau(t) \cdot f(\tilde{\tau}(t), \tilde{x}(t), w) + \langle \psi_x(t), g(\tilde{\tau}(t), \tilde{x}(t), w) \rangle \} =$$

$$\stackrel{q.t.p.}{=} \psi_\tau(t) \cdot f(\tilde{\tau}(t), \tilde{x}(t), \tilde{w}(t)) + \langle \psi_x(t), g(\tilde{\tau}(t), \tilde{x}(t), \tilde{w}(t)) \rangle, \quad (4.22)$$

onde c representa uma constante, $\tilde{x}(t) = \tilde{z}(\tilde{\tau}(t))$ e $\tilde{w}(t) = \pi^{-1}(\tilde{z}(\tilde{\tau}(t)))$. Vejamos agora que c deve ser positiva. Se $c = 0$, das duas uma: ou $\tilde{w}(t) \equiv \hat{w}$ ou não. Na primeira situação

$$\dot{\tilde{\tau}}(t) = f(\tilde{\tau}(t), \tilde{x}(t), \tilde{w}(t)) = 0 \Leftrightarrow \tau(t) = \text{const}$$

¹³ \tilde{T} representa o tempo de transferência mínimo para o problema (4.5, 4.6), i.e., o tempo associado a $\tilde{z}(\cdot)$.

o que resulta impossível pelo facto de $a \neq b$. No segundo caso ($\tilde{w}(t) \not\equiv \hat{w}$)

$$0 = \sup_{w \in S^n} \left\{ \frac{\psi_\tau(t) + \langle \psi_x(t), \pi(w) \rangle}{L(\tilde{\tau}(t), \tilde{x}(t), \pi(w))} \right\} = \sup_{u \in \mathbb{R}^n} \left\{ \frac{\psi_\tau(t) + \langle \psi_x(t), u \rangle}{L(\tilde{\tau}(t), \tilde{x}(t), u)} \right\}$$

de onde vem imediatamente que $\psi_x(t) \equiv 0$. Portanto

$$0 = \sup_{u \in \mathbb{R}^n} \left\{ \frac{\psi_\tau(t)}{L(\tilde{\tau}(t), \tilde{x}(t), u)} \right\}$$

que só pode acontecer quando $\psi_\tau(t) \leq 0$ e $\tilde{w}(t) = \hat{w}$ para q.t.p. $t \in [0, \tilde{T}]$. Isto não pode ser verdade pois nega a nossa hipótese ($\tilde{w}(t) \not\equiv \hat{w}$). Assim

$$c > 0$$

de onde se segue que

$$\tilde{w}(t) \neq \hat{w} \text{ para q.t.p. } t \in [0, \tilde{T}], \quad (4.23)$$

pois

$$f(\tilde{\tau}(t), \tilde{x}(t), \hat{w}) = 0 \text{ e } g(\tilde{\tau}(t), \tilde{x}(t), \hat{w}) = 0.$$

De (4.22) e (4.23) tiramos a igualdade (válida em q.t.p.)

$$c = \frac{\psi_\tau(t) + \langle \psi_x(t), \tilde{u}(t) \rangle}{L(\tilde{\tau}(t), \tilde{x}(t), \tilde{u}(t))} \Leftrightarrow L(\tilde{\tau}(t), \tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) = c^{-1} (\psi_\tau(t) + \langle \psi_x(t), \tilde{u}(t) \rangle),$$

onde $\tilde{u}(t) = \pi(\tilde{w}(t))$. Seja

$$|\psi_\tau(t)| \leq M \text{ e } \|\psi_x(t)\| \leq M \text{ em } [0, \tilde{T}].$$

Então,

$$L(\tilde{\tau}(t), \tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) \leq c^{-1} M (1 + \|\tilde{u}(t)\|) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\theta(\|\tilde{u}(t)\|)}{\|\tilde{u}(t)\|} \leq \frac{L(\tilde{\tau}(t), \tilde{x}(t), \tilde{u}(t))}{\|\tilde{u}(t)\|} \leq c^{-1} M \frac{1 + \|\tilde{u}(t)\|}{\|\tilde{u}(t)\|}$$

para *q.t.p.* $t \in [0, \tilde{T}]$. O último membro da desigualdade é majorado por $2c^{-1}M$ se $\|\tilde{u}(t)\| \geq 1$.

Usando a condição de crescimento dada por (H2):

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\theta(r)}{r} = +\infty,$$

podemos achar o valor r_0 tal que, $r \geq r_0 \Rightarrow \frac{\theta(r)}{r} \geq 2c^{-1}M$ e concluir que $\|\tilde{u}(t)\| = \|\tilde{z}(\tilde{\tau}(t))\| \leq \max\{1, r_0\}$. ■

4.2 Generalização do teorema de regularidade a problemas de ordem superior

Consideremos agora o problema básico do Cálculo das Variações de ordem $m > 1$.¹⁴

$$J[z(\cdot)] := \int_a^b L\left(\tau, z(\tau), \dot{z}(\tau), \dots, z^{(m)}(\tau)\right) d\tau \longrightarrow \min,$$

$$z(\cdot) \in W_{m,1}([a, b], \mathbb{R}^n),$$

$$a < b,$$

¹⁴ $W_{m,1}([a, b], \mathbb{R}^n)$ representa o espaço constituído por todas as funções $z(\cdot)$ de $[a, b]$ em \mathbb{R}^n que são absolutamente contínuas conjuntamente com as suas derivadas até à ordem $m-1$. (A m -ésima derivada de $z(\cdot)$ pertence a L_1 .) De um modo mais geral, $W_{m,p}([a, b], \mathbb{R}^n)$ denota a classe das funções $z: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ que são absolutamente contínuas conjuntamente com as suas derivadas até à ordem $m-1$ e possuindo m -ésima derivada pertencente a $L_p([a, b], \mathbb{R}^n)$.

$$\begin{aligned}
z(a) &= z_a^1, & z(b) &= z_b^1, \\
\dot{z}(a) &= z_a^2, & \dot{z}(b) &= z_b^2, \\
&\vdots & &\vdots \\
z^{(m-1)}(a) &= z_a^m, & z^{(m-1)}(b) &= z_b^m.
\end{aligned} \tag{P_m}$$

Os mesmos argumentos usados em §4.1 vão ser agora usados para obter o equivalente ao Teorema 51 para o problema (P_m) .

Teorema 53 *Se forem satisfeitas as hipóteses:*

(H1) $L(\cdots)$ é uma função continuamente diferenciável nos seus argumentos:
 $L : [a, b] \times \mathbb{R}^{(m+1) \times n} \rightarrow \mathbb{R} \in C^1$;

(H2) Existe $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$L(\tau, z_1, \dots, z_m, u) \geq \theta(\|u\|) > \zeta > 0,$$

para todo o $(\tau, z_1, \dots, z_m, u) \in [a, b] \times \mathbb{R}^{(m+1) \times n}$, e

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{r}{\theta(r)} = 0;$$

(H3) O lagrangeano $L(\cdots)$ verifica a seguinte condição de crescimento:
 existem constantes γ, β, η e μ , com $\gamma > 0$, $\beta < 2$ e $\mu \geq \max\{\beta - 1, -1\}$,
 tais que para todo o $\tau \in [a, b]$ e z_1, \dots, z_m, u em \mathbb{R}^n

$$\begin{aligned}
&\left(\left| L_{z_i^j}(\tau, z_1, \dots, z_m, u) \right| + |L_\tau(\tau, z_1, \dots, z_m, u)| \right) \|u\|^\mu \leq \\
&\leq \gamma L^\beta(\tau, z_1, \dots, z_m, u) + \eta, \quad \begin{matrix} i & \in & \{1, \dots, m\} \\ j & \in & \{1, \dots, n\} \end{matrix};
\end{aligned}$$

Então qualquer solução $\tilde{z}(\cdot) \in W_{m,1}([a, b], \mathbb{R}^n)$ de (P_m) pertence ao espaço $W_{m,\infty}([a, b], \mathbb{R}^n)$, ou seja, tem m -ésima derivada limitada.

Prova: Seja

$$t(\tau) = \int_a^\tau L\left(\theta, z(\theta), \dot{z}(\theta), \dots, z^{(m)}(\theta)\right) d\theta, \quad \tau \in [a, b].$$

Ela é uma função em τ estritamente crescente ao longo de uma curva $z(\cdot) \in$

$W_{m,1}([a, b], \mathbb{R}^n)$:

$$\frac{dt(\tau)}{d\tau} = L\left(\tau, z(\tau), \dot{z}(\tau), \dots, z^{(m)}(\tau)\right) \stackrel{\text{por (H2)}}{>} 0.$$

Existe deste modo a função $\tau(\cdot)$, inversa de $t(\cdot)$ no intervalo $[a, b]$, tal que

$$\frac{d\tau(t)}{dt} = \frac{1}{L\left(\tau(t), z\left(\tau(t)\right), \dot{z}\left(\tau(t)\right), \dots, z^{(m)}\left(\tau(t)\right)\right)},$$

o que implica que

$$\frac{dz\left(\tau(t)\right)}{dt} = \frac{dz\left(\tau(t)\right)}{d\tau} \cdot \frac{d\tau(t)}{dt} = \frac{\dot{z}\left(\tau(t)\right)}{L\left(\tau(t), z\left(\tau(t)\right), \dot{z}\left(\tau(t)\right), \dots, z^{(m)}\left(\tau(t)\right)\right)},$$

$$\frac{d\dot{z}\left(\tau(t)\right)}{dt} = \frac{d\dot{z}\left(\tau(t)\right)}{d\tau} \cdot \frac{d\tau(t)}{dt} = \frac{\ddot{z}\left(\tau(t)\right)}{L\left(\tau(t), z\left(\tau(t)\right), \dot{z}\left(\tau(t)\right), \dots, z^{(m)}\left(\tau(t)\right)\right)},$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned} \frac{dz^{(m-1)}\left(\tau(t)\right)}{dt} &= \frac{dz^{(m-1)}\left(\tau(t)\right)}{d\tau} \cdot \frac{d\tau(t)}{dt} \\ &= \frac{z^{(m)}\left(\tau(t)\right)}{L\left(\tau(t), z\left(\tau(t)\right), \dot{z}\left(\tau(t)\right), \dots, z^{(m)}\left(\tau(t)\right)\right)}. \end{aligned}$$

Deste modo, tomando t como a nova variável independente - tempo, considerando

$\tau(t)$, $x_1(t) = z\left(\tau(t)\right)$, $x_2(t) = \dot{z}\left(\tau(t)\right)$, \dots , $x_m(t) = z^{(m-1)}\left(\tau(t)\right)$ como variáveis

de estado e $u(t) = z^{(m)}\left(\tau(t)\right)$ como o parâmetro de controlo, podemos escrever

o problema (P_m) na forma:

$$\begin{aligned}
 & T \longrightarrow \min \\
 \left\{ \begin{array}{ll}
 \dot{\tau}(t) &= \frac{1}{L(\tau(t), x_1(t), \dots, x_m(t), u(t))} & u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \\
 \dot{x}_1(t) &= \frac{x_2(t)}{L(\tau(t), x_1(t), \dots, x_m(t), u(t))} & \tau(0) = a, \quad \tau(T) = b \\
 \vdots & \vdots & x_1(0) = z_a^1, \quad x_1(T) = z_b^1 \\
 \dot{x}_{m-1}(t) &= \frac{x_m(t)}{L(\tau(t), x_1(t), \dots, x_m(t), u(t))} & \vdots \\
 \dot{x}_m(t) &= \frac{u(t)}{L(\tau(t), x_1(t), \dots, x_m(t), u(t))} & x_m(0) = z_a^m, \quad x_m(T) = z_b^m
 \end{array} \right. \quad (4.24)
 \end{aligned}$$

Um dos requisitos à aplicação do PMP é o de que o controlo u seja essencialmente limitado. Ora na situação presente $u(\cdot)$ pertence a L_1 e não a L_∞ . No entanto se, dado $(\tau, x_1, \dots, x_m) \in [a, b] \times \mathbb{R}^{mxn}$ arbitrário, adicionarmos $0 \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{mxn}$ ao conjunto de todas as velocidades possíveis do problema (4.24), iremos ver que o conjunto resultante, denotado por¹⁵

$$E(\tau, x_1, \dots, x_m) = \{0\} \cup \left\{ \left(\frac{1}{\bar{L}}, \frac{x_2}{\bar{L}}, \dots, \frac{x_m}{\bar{L}}, \frac{u}{\bar{L}} \right) : u \in \mathbb{R}^n \right\},$$

é um subconjunto compacto de \mathbb{R}^{1+mxn} . Com efeito, o conjunto $E(\tau, x_1, \dots, x_m)$ pode ser representado como a imagem homeomórfica de uma esfera n -dimensional S^n . Para este fim, fixemos um ponto $\hat{w} \in S^n$, que designaremos por pólo norte, e consideremos um homeomorfismo, por exemplo a projecção estereográfica

$$\pi: S^n \setminus \{\hat{w}\} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (4.25)$$

sob o qual uma sucessão arbitrária de pontos $w_i \in S^n \setminus \{\hat{w}\}$ que convirja para \hat{w} se torne numa sucessão de pontos $u_i = \pi(w_i) \in \mathbb{R}^n$ convergente para infinito.

¹⁵ \bar{L} representa $L(\tau, x_1, \dots, x_m, u)$.

As funções

$$\begin{aligned} w &\rightarrow \frac{1}{L(\tau, x_1, \dots, x_m, \pi(w))}, \\ w &\rightarrow \frac{x_i}{L(\tau, x_1, \dots, x_m, \pi(w))}, \\ w &\rightarrow \frac{\pi(w)}{L(\tau, x_1, \dots, x_m, \pi(w))}, \end{aligned} \quad (4.26)$$

com $i \in \{2, \dots, m\}$, são contínuas em $S^n \setminus \{\hat{w}\}$, como resulta da continuidade de $L(\dots)$ e de $\pi(\cdot)$ e do facto de $L(\tau, x_1, \dots, x_m, \pi(w)) \neq 0$. Em virtude da hipótese (H2)

$$\lim_{\|u\| \rightarrow +\infty} \frac{\|u\|}{\theta(\|u\|)} = 0$$

e como $L(\tau, x_1, \dots, x_m, u) \geq \theta(\|u\|)$, também

$$\lim_{\|u\| \rightarrow +\infty} \frac{\|u\|}{L(\tau, x_1, \dots, x_m, u)} = 0. \quad (4.27)$$

Assim, podemos estender (4.26) a funções $\phi^{\tau, x}(\cdot)$, $\gamma_1^{\tau, x}(\cdot)$, \dots , $\gamma_m^{\tau, x}(\cdot)$ que são contínuas em toda a esfera S^n :

$$\begin{aligned} \phi^{\tau, x}(w) = f(\tau, x_1, \dots, x_m, w) &= \begin{cases} \frac{1}{L(\tau, x_1, \dots, x_m, \pi(w))} & \text{se } w \neq \hat{w} \\ 0 & \text{se } w = \hat{w} \end{cases}, \\ \gamma_1^{\tau, x}(w) = g_1(\tau, x_1, \dots, x_m, w) &= \begin{cases} \frac{x_2}{L(\tau, x_1, \dots, x_m, \pi(w))} & \text{se } w \neq \hat{w} \\ 0 & \text{se } w = \hat{w} \end{cases}, \\ \vdots \\ \gamma_{m-1}^{\tau, x}(w) = g_{m-1}(\tau, x_1, \dots, x_m, w) &= \begin{cases} \frac{x_m}{L(\tau, x_1, \dots, x_m, \pi(w))} & \text{se } w \neq \hat{w} \\ 0 & \text{se } w = \hat{w} \end{cases}, \end{aligned}$$

$$\gamma_m^x(w) = g_m(x_1, \dots, x_m, w) = \begin{cases} \frac{\pi(w)}{L(\tau, x_1, \dots, x_m, \pi(w))} & \text{se } w \neq \hat{w} \\ 0 & \text{se } w = \hat{w} \end{cases}.$$

A aplicação contínua

$$w \rightarrow (\phi^{\tau, x}(w), \gamma_1^{\tau, x}(w), \dots, \gamma_m^{\tau, x}(w)),$$

de S^n em $E(\tau, x_1, \dots, x_m)$, é com certeza injectiva e por conseguinte um homeomorfismo já que S^n é compacto. Deste modo definimos o problema autónomo de controlo óptimo:

$$T \longrightarrow \min \tag{4.28}$$

$$\begin{cases} \dot{\tau}(t) = f(\tau(t), x_1(t), \dots, x_m(t), w(t)) \\ \dot{x}_1(t) = g_1(\tau(t), x_1(t), \dots, x_m(t), w(t)) \\ \vdots \\ \dot{x}_m(t) = g_m(\tau(t), x_1(t), \dots, x_m(t), w(t)) \end{cases}, \quad \begin{matrix} w : \mathbb{R} \rightarrow S^n \\ \tau(0) = a \quad , \quad \tau(T) = b \\ x_1(0) = z_a^1 \quad , \quad x_1(T) = z_b^1 \\ \vdots \\ x_m(0) = z_a^m \quad , \quad x_m(T) = z_b^m \end{matrix} \tag{4.29}$$

que possui o conjunto dos valores admissíveis do parâmetro de controlo, compacto.

Com este mecanismo podemos transformar qualquer curva em $W_{m,1}([a, b], \mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned} z(a) &= z_a^1 & z(b) &= z_b^1 \\ \dot{z}(a) &= z_a^2 & \dot{z}(b) &= z_b^2 \\ &\vdots & &\vdots \\ z^{(m-1)}(a) &= z_a^m & z^{(m-1)}(b) &= z_b^m \end{aligned} \quad (4.30)$$

numa solução de (4.29)

$$w(t), \tau(t), x_1(t), \dots, x_m(t) \quad \text{com } w(t) \neq \hat{w} \text{ em q.t.p. } t \in [0, T] \quad (4.31)$$

de tal modo que o tempo de transferência T para a solução (4.31) é igual ao valor de $J[z(\cdot)]$,

$$T = J[z(\cdot)] = \int_a^b L\left(\tau, z(\tau), \dot{z}(\tau), \dots, z^{(m)}(\tau)\right) d\tau.$$

Além disso, toda a solução (4.31) pode ser obtida com a ajuda desta correspondência. (A demonstração da relação biunívoca entre (4.30) e (4.31) é igual à do sub capítulo anterior.)

Para aplicarmos o PMP ao problema (4.28, 4.29) basta assegurar que estas funções têm derivada contínua com respeito aos primeiros $m+1$ argumentos.

Com $i \in \{1, \dots, m\}$, $k \in \{1, \dots, m-1\}$ e $j, l \in \{1, \dots, n\}$

$$\begin{aligned} f_{x_i^j}(\tau, x_1, \dots, x_m, w) &= \frac{\partial f}{\partial x_i^j}(\tau, x_1, \dots, x_m, w) = \\ &= \begin{cases} -\frac{L_{z_i^j}(\tau, x_1, \dots, x_m, \pi(w))}{L^2(\tau, x_1, \dots, x_m, \pi(w))} & \text{se } w \neq \hat{w} \\ 0 & \text{se } w = \hat{w} \end{cases}, \end{aligned}$$

$$f_{\tau}(\tau, x_1, \dots, x_m, w) = \begin{cases} -\frac{L_{\tau}(\tau, x_1, \dots, x_m, \pi(w))}{L^2(\tau, x_1, \dots, x_m, \pi(w))} & \text{se } w \neq \hat{w} \\ 0 & \text{se } w = \hat{w} \end{cases},$$

$$\frac{\partial g_m}{\partial x_i^j}(\tau, x_1, \dots, x_m, w) = \begin{cases} -\frac{L_{z_i^j}(\tau, x_1, \dots, x_m, \pi(w))}{L^2(\tau, x_1, \dots, x_m, \pi(w))} \cdot \pi(w) & \text{se } w \neq \hat{w} \\ 0 & \text{se } w = \hat{w} \end{cases},$$

$$\frac{\partial g_m}{\partial \tau}(\tau, x_1, \dots, x_m, w) = \begin{cases} -\frac{L_{\tau}(\tau, x_1, \dots, x_m, \pi(w))}{L^2(\tau, x_1, \dots, x_m, \pi(w))} \cdot \pi(w) & \text{se } w \neq \hat{w} \\ 0 & \text{se } w = \hat{w} \end{cases},$$

$$\frac{\partial g_k^l}{\partial x_i^j}(\tau, x_1, \dots, x_m, w) = \begin{cases} -\frac{L_{z_i^j}(\tau, x_1, \dots, x_m, \pi(w)) x_{k+1}^l}{L^2(\tau, x_1, \dots, x_m, \pi(w))} & \text{se } w \neq \hat{w} \\ 0 & \text{se } w = \hat{w} \end{cases},$$

para $(i, j) \neq (k+1, l)$, e

$$\begin{aligned} & \frac{\partial g_{i-1}^j}{\partial x_i^j}(x_1, \dots, x_m, w) = \\ & = \begin{cases} \frac{L(x_1, \dots, x_m, \pi(w)) - L_{z_i^j}(x_1, \dots, x_m, \pi(w)) x_i^j}{L^2(x_1, \dots, x_m, \pi(w))} & \text{se } w \neq \hat{w} \\ 0 & \text{se } w = \hat{w} \end{cases}, \\ & \frac{\partial g_k^j}{\partial \tau}(\tau, x_1, \dots, x_m, w) = \begin{cases} -\frac{L_{\tau}(\tau, x_1, \dots, x_m, \pi(w)) x_{k+1}^j}{L^2(\tau, x_1, \dots, x_m, \pi(w))} & \text{se } w \neq \hat{w} \\ 0 & \text{se } w = \hat{w} \end{cases}, \end{aligned}$$

onde

$$g_i(x_1, \dots, x_m, w) = \begin{bmatrix} g_i^1(x_1, \dots, x_m, w) \\ \vdots \\ g_i^n(x_1, \dots, x_m, w) \end{bmatrix}.$$

Uma vez que $L(\cdots) \in C^1$, $L(\tau, x_1, \dots, x_m, \pi(w)) > 0$ para todo o $(m+2)$ -uplo $(\tau, x_1, \dots, x_m, \pi(w))$ e $\pi(\cdot)$ é uma função contínua, sai de imediato que $(p = 1, \dots, m)$

$$f_{x_i^j}(\tau, x_1, \dots, x_m, w),$$

$$f_\tau(\tau, x_1, \dots, x_m, w),$$

$$g_{p_r}(\tau, x_1, \dots, x_m, w),$$

$$g_{p_{x_i^j}}(\tau, x_1, \dots, x_m, w),$$

são contínuas para $w \neq \hat{w}$. Basta-nos assim assegurar que¹⁶

$$\begin{aligned} \lim_{\rho((\tau, x_1, \dots, x_m, w), (\bar{\tau}, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m, \hat{w})) \rightarrow 0} \frac{L_{z_i^j}(\tau, x_1, \dots, x_m, \pi(w))}{L^2(\tau, x_1, \dots, x_m, \pi(w))} &= 0, \\ \lim_{\rho((\tau, x_1, \dots, x_m, w), (\bar{\tau}, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m, \hat{w})) \rightarrow 0} \frac{L_\tau(\tau, x_1, \dots, x_m, \pi(w))}{L^2(\tau, x_1, \dots, x_m, \pi(w))} &= 0, \\ \lim_{\rho((\tau, x_1, \dots, x_m, w), (\bar{\tau}, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m, \hat{w})) \rightarrow 0} \frac{L_{z_i^j}(\tau, x_1, \dots, x_m, \pi(w))}{L^2(\tau, x_1, \dots, x_m, \pi(w))} \|\pi(w)\| &= 0, \\ \lim_{\rho((\tau, x_1, \dots, x_m, w), (\bar{\tau}, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m, \hat{w})) \rightarrow 0} \frac{L_\tau(\tau, x_1, \dots, x_m, \pi(w))}{L^2(\tau, x_1, \dots, x_m, \pi(w))} \|\pi(w)\| &= 0, \\ \bar{x}_{k+1}^l \left(\lim_{\rho((\tau, x_1, \dots, x_m, w), (\bar{\tau}, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m, \hat{w})) \rightarrow 0} \frac{L_{z_i^j}(\tau, x_1, \dots, x_m, \pi(w))}{L^2(\tau, x_1, \dots, x_m, \pi(w))} \right) &= 0, \quad (4.32) \\ \bar{x}_{k+1}^j \left(\lim_{\rho((\tau, x_1, \dots, x_m, w), (\bar{\tau}, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m, \hat{w})) \rightarrow 0} \frac{L_\tau(\tau, x_1, \dots, x_m, \pi(w))}{L^2(\tau, x_1, \dots, x_m, \pi(w))} \right) &= 0, \\ \lim_{\rho((\tau, x_1, \dots, x_m, w), (\bar{\tau}, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m, \hat{w})) \rightarrow 0} \frac{1}{L(\tau, x_1, \dots, x_m, \pi(w))} &= 0, \\ -\bar{x}_i^j \left(\lim_{\rho((\tau, x_1, \dots, x_m, w), (\bar{\tau}, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m, \hat{w})) \rightarrow 0} \frac{L_{z_i^j}(\tau, x_1, \dots, x_m, \pi(w))}{L^2(\tau, x_1, \dots, x_m, \pi(w))} \right) &= 0, \end{aligned}$$

¹⁶ $\rho(\cdot, \cdot)$ é uma distância definida em $[a, b] \times \mathbb{R}^{m \times n} \times S^n$.

que se faz da mesma maneira que no sub capítulo anterior.

Fazendo uso do princípio do máximo para sistemas autónomos, sabemos que existem funções absolutamente contínuas no intervalo $[0, \tilde{T}]^{17}$

$$\psi_\tau(\cdot), \psi_{x_1}(\cdot), \dots, \psi_{x_m}(\cdot)$$

não todas nulas, que verificam o sistema adjunto

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\psi}_\tau(t) = -H_\tau(\tau(t), x_1(t), \dots, x_m(t), \psi_\tau(t), \psi_{x_1}(t), \dots, \psi_{x_m}(t), w(t)) \\ \dot{\psi}_{x_1}(t) = -H_{x_1}(\tau(t), x_1(t), \dots, x_m(t), \psi_\tau(t), \psi_{x_1}(t), \dots, \psi_{x_m}(t), w(t)) \\ \vdots \\ \dot{\psi}_{x_m}(t) = -H_{x_m}(\tau(t), x_1(t), \dots, x_m(t), \psi_\tau(t), \psi_{x_1}(t), \dots, \psi_{x_m}(t), w(t)) \end{array} \right. \quad (4.33)$$

com

$$\begin{aligned} H &= H(\tau, x_1, \dots, x_m, \psi_\tau, \psi_{x_1}, \dots, \psi_{x_m}, w) = \\ &= \psi_\tau \cdot f(\tau, x_1, \dots, x_m, w) + \langle \psi_{x_1}, g_1(\tau, x_1, \dots, x_m, w) \rangle + \dots + \\ &\quad + \langle \psi_{x_m}, g_m(\tau, x_1, \dots, x_m, w) \rangle. \end{aligned}$$

¹⁷ \tilde{T} representa o tempo de transferência mínimo para o problema (4.28, 4.29), i.e., o tempo associado a $\tilde{z}(\cdot)$.

Para todo o $t \in [0, \tilde{T}]$, a condição do máximo permite-nos escrever

$$\begin{aligned}
 0 \leq c = \sup_{w \in \tilde{S}^n} \{ & H(\tilde{\tau}(t), \tilde{x}_1(t), \dots, \tilde{x}_m(t), \psi_\tau(t), \psi_{x_1}(t), \dots, \psi_{x_m}(t), w) \} = \\
 & \stackrel{q.t.p.}{=} \psi_\tau(t) \cdot f(\tilde{\tau}(t), \tilde{x}_1(t), \dots, \tilde{x}_m(t), \tilde{w}(t)) + \\
 & + \langle \psi_{x_1}(t), g_1(\tilde{\tau}(t), \tilde{x}_1(t), \dots, \tilde{x}_m(t), \tilde{w}(t)) \rangle + \dots + \\
 & + \langle \psi_{x_m}(t), g_m(\tilde{\tau}(t), \tilde{x}_1(t), \dots, \tilde{x}_m(t), \tilde{w}(t)) \rangle
 \end{aligned} \tag{4.34}$$

onde c representa uma constante, $\tilde{x}_1(t) = \tilde{z}(\tilde{\tau}(t))$, \dots , $\tilde{x}_m(t) = \tilde{z}^{(m-1)}(\tilde{\tau}(t))$ e $\tilde{w}(t) = \pi^{-1}(\tilde{z}^{(m)}(\tilde{\tau}(t)))$. Vejamos agora que c deve ser positiva. Se $c = 0$, das duas uma: ou $\tilde{w}(t) \equiv \hat{w}$ ou não. Na primeira situação

$$\dot{\tilde{\tau}}(t) = f(\tilde{\tau}(t), \tilde{x}_1(t), \dots, \tilde{x}_m(t), \hat{w}) = 0 \Leftrightarrow \tau(t) = \text{const}$$

o que resulta impossível pelo facto de $a \neq b$. No segundo caso ($\tilde{w}(t) \not\equiv \hat{w}$)

$$\begin{aligned}
 H(\tau, x_1, \dots, x_m, \psi_\tau, \psi_{x_1}, \dots, \psi_{x_m}, w) = \\
 = \frac{\psi_\tau + \langle \psi_{x_1}, x_2 \rangle + \dots + \langle \psi_{x_{m-1}}, x_m \rangle + \langle \psi_{x_m}, \pi(w) \rangle}{L(\tau, x_1, \dots, x_m, \pi(w))}
 \end{aligned}$$

e a condição do máximo (4.34) fica

$$\begin{aligned}
 0 \equiv \sup_{u \in \mathbb{R}^n} \left\{ \frac{\psi_\tau(t) + \langle \psi_{x_1}(t), \tilde{x}_2(t) \rangle + \dots + \langle \psi_{x_{m-1}}(t), \tilde{x}_m(t) \rangle + \langle \psi_{x_m}(t), u \rangle}{L(\tilde{\tau}(t), \tilde{x}_1(t), \dots, \tilde{x}_m(t), u)} \right\} \\
 = M(t)
 \end{aligned} \tag{4.35}$$

o que implica

$$\psi_{x_m}(t) = 0 \wedge \psi_\tau(t) + \langle \psi_{x_1}(t), \tilde{x}_2(t) \rangle + \dots + \langle \psi_{x_{m-1}}(t), \tilde{x}_m(t) \rangle \leq 0. \tag{4.36}$$

Se denotarmos as funções

$$L(\tau(t), x_1(t), \dots, x_m(t), \pi(w(t))),$$

$$L_\tau(\tau(t), x_1(t), \dots, x_m(t), \pi(w(t))) \quad \text{e}$$

$$L_{x_i}(\tau(t), x_1(t), \dots, x_m(t), \pi(w(t))),$$

respectivamente por $\bar{L}(t)$, $\bar{L}_\tau(t)$ e $\bar{L}_{x_i}(t)$, o sistema (4.33) toma a forma

$$\begin{cases} \dot{\psi}_\tau(t) &= \frac{\bar{L}_\tau(t)}{\bar{L}(t)} M(t) \\ \dot{\psi}_{x_1}(t) &= \frac{\bar{L}_{x_1}(t)}{\bar{L}(t)} M(t) \\ \dot{\psi}_{x_i}(t) &= -\frac{\psi_{x_{i-1}}(t)}{\bar{L}(t)} + \frac{\bar{L}_{x_i}(t)}{\bar{L}(t)} M(t) \end{cases}, \quad i \in \{2, \dots, m\}.$$

Dado (4.35), obtemos

$$\begin{cases} \dot{\psi}_\tau(t) &= 0 \\ \dot{\psi}_{x_1}(t) &= 0 \\ \dot{\psi}_{x_i}(t) &= -\frac{\psi_{x_{i-1}}(t)}{L(\tau(t), x_1(t), \dots, x_m(t), \pi(w(t)))}, \quad i \in \{2, \dots, m\} \end{cases}$$

e o facto de $\psi_{x_m}(t) = 0$ ($\dot{\psi}_{x_m}(t) = 0$) implica

$$\psi_{x_{m-1}}(t) = 0 \Rightarrow \psi_{x_{m-2}}(t) = 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow \psi_{x_1}(t) = 0,$$

$$\psi_\tau(t) = \text{const} \neq 0.$$

Ficamos então com

$$0 = \sup_{w \in S^n} \left\{ \frac{\psi_\tau}{L(\tilde{\tau}(t), \tilde{x}_1(t), \dots, \tilde{x}_m(t), \pi(w))} \right\}.$$

Como $L(\tilde{\tau}(t), \tilde{x}_1(t), \dots, \tilde{x}_m(t), \pi(w)) > 0$ temos $\psi_\tau \leq 0$ o que por sua vez implica que

$$\tilde{w}(t) = \hat{w}$$

para *q.t.p.* $t \in [0, \tilde{T}]$. Isto é absurdo já que contradiz o pressuposto inicial.

Assim

$$c > 0$$

de onde se segue que

$$\tilde{w}(t) \neq \hat{w} \text{ para } q.t.p. \ t \in [0, \tilde{T}], \quad (4.37)$$

pois

$$f(\tilde{\tau}(t), \tilde{x}_1(t), \dots, \tilde{x}_m(t), \hat{w}) = 0,$$

$$g_1(\tilde{\tau}(t), \tilde{x}_1(t), \dots, \tilde{x}_m(t), \hat{w}) = \dots = g_m(\tilde{\tau}(t), \tilde{x}_1(t), \dots, \tilde{x}_m(t), \hat{w}) = 0.$$

De (4.34) e (4.37) tiramos a igualdade (válida para *q.t.p.* $t \in [0, \tilde{T}]$)

$$\begin{aligned} c &= \frac{\psi_\tau(t) + \langle \psi_{x_1}(t), \tilde{x}_2(t) \rangle + \dots + \langle \psi_{x_{m-1}}(t), \tilde{x}_m(t) \rangle + \langle \psi_{x_m}(t), \tilde{u}(t) \rangle}{L(\tilde{\tau}(t), \tilde{x}_1(t), \dots, \tilde{x}_m(t), \tilde{u}(t))} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow c^{-1} \left(\psi_\tau(t) + \langle \psi_{x_1}(t), \tilde{x}_2(t) \rangle + \dots + \langle \psi_{x_{m-1}}(t), \tilde{x}_m(t) \rangle + \langle \psi_{x_m}(t), \tilde{u}(t) \rangle \right) \\ &= \end{aligned} \quad (4.38)$$

$$L(\tilde{\tau}(t), \tilde{x}_1(t), \dots, \tilde{x}_m(t), \tilde{u}(t)),$$

onde $\tilde{u}(t) = \pi(\tilde{w}(t))$. Seja

$$|\psi_\tau(t)| \leq M, \|\psi_{x_1}(t)\| \leq M, \|x_i(t)\| \leq M,$$

$$\forall t \in [0, \tilde{T}], \quad i = 1, \dots, m.$$

Então, lembrando que pela desigualdade de Schwarz

$$|\langle \psi_{x_i}(t), \tilde{x}_{i+1}(t) \rangle| \leq \|\psi_{x_i}(t)\| \cdot \|\tilde{x}_{i+1}(t)\|, \quad \forall i \in \{1, \dots, m-1\},$$

$$\langle \psi_{x_m}(t), \tilde{u}(t) \rangle \leq \|\psi_{x_m}(t)\| \cdot \|\tilde{u}(t)\|,$$

obtemos

$$L(\tilde{\tau}(t), \tilde{x}_1(t), \dots, \tilde{x}_m(t), \tilde{u}(t)) \leq c^{-1} M (1 + (m-1) M + \|\tilde{u}(t)\|)$$

o que por sua vez implica as relações

$$\begin{aligned} \frac{\theta(\|\tilde{u}(t)\|)}{\|\tilde{u}(t)\|} &\leq \frac{L(\tilde{\tau}(t), \tilde{x}_1(t), \dots, \tilde{x}_m(t), \tilde{u}(t))}{\|\tilde{u}(t)\|} \leq \\ &\leq c^{-1} M \frac{1 + (m-1) M + \|\tilde{u}(t)\|}{\|\tilde{u}(t)\|} \end{aligned}$$

para q.t.p. $t \in [0, \tilde{T}]$. O último membro da desigualdade é limitado por

$$(2 + (m-1) M) c^{-1} M$$

se $\|\tilde{u}(t)\| \geq 1$. Usando a condição de crescimento dada por (H2):

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\theta(r)}{r} = +\infty,$$

podemos achar o valor r_0 tal que $r \geq r_0 \Rightarrow \frac{\theta(r)}{r} \geq (2 + (m-1) M) c^{-1} M$ e

concluir que $\|\tilde{u}(t)\| \leq \max\{1, r_0\}$. Atendendo ao facto de $\tilde{u}(t) = \tilde{z}^{(m)}(\tilde{\tau}(t))$,

concluimos que $\tilde{z}^{(m-1)}(\cdot)$ é Lipschitziana em $[a, b]$. ■

Observação 54 Os Teoremas 51 e 53 são na realidade verdadeiros não só para os $\tilde{z}(\cdot)$ óptimos mas também para todos os outros $\tilde{z}(\cdot)$ correspondentes às extremais de Pontryagin. □

Observação 55 Se além das hipóteses (H1) a (H3), exigirmos convexidade do lagrangeano no argumento final u , temos garantia de existência de um minimizante (compare com [15, Cap. 8]). □

4.3 Consignação

Como já foi mencionado em §3.2.1, para lagrangeanos $L(x, \dot{x})$ autónomos e convexos em \dot{x} , só se têm minimizantes Lipschitzianos. A questão de saber se um problema (P_m) autónomo, com $L(z_1, z_2, \dots, z_m, u)$ convexo em u e verificando as hipóteses (H1) e (H2), pode ou não apresentar um minimizante não pertencente a $W_{m,\infty}$ foi posta por F. Clarke e R. Vinter em [6, pp. 43-44] e [10]. Eles conjecturaram que o problema

$$J[z(\cdot)] = \int_0^1 L(z(\tau), \dot{z}(\tau), \ddot{z}(\tau)) d\tau \rightarrow \min \quad (4.39)$$

com $n = 1$, $m = 2$, $L(z_1, z_2, u) = |z_1^2 - z_2^5|^2 |u|^{22} + \varepsilon_1 |u|^2 + \varepsilon_2$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ e $z_1(0) = 0$, $z_1(1) = k$, tem minimizante $z(\tau) = k\tau^{5/3}$. No entanto, apenas demonstraram que $z(\cdot)$ é uma extremal: que claramente não pertence a $W_{2,\infty}$ uma vez que $\ddot{z}(\cdot)$ não é limitada. Recentemente foi provado por A. Sarychév (*vide* [29]), que os integrandos autónomos de ordem superior, não só podem possuir minimizantes não-Lipschitzianos, como ainda exibir o fenómeno de Lavrentiev $W_{m,1} \setminus W_{m,\infty}$. O desafio de demonstrar a minimalidade de $z(\cdot)$ no problema (4.39) continua em aberto, e vamos ver que o Teorema 53 não é aplicável a este caso. Com efeito, embora

- i) $L(z_1, z_2, u)$ seja continuamente diferenciável;
- ii) $L(z_1, z_2, u) = |z_1^2 - z_2^5|^2 |u|^{22} + \varepsilon_1 |u|^2 + \varepsilon_2 \geq \varepsilon_1 |u|^2 + \varepsilon_2 > 0$ para todo o

(z_1, z_2, u) e fazendo $\theta(u) = \varepsilon_1 u^2 + \varepsilon_2$, se tenha que

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\theta(u)}{u} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \varepsilon_1 u + \frac{\varepsilon_2}{u} = +\infty;$$

a hipótese (H3) é violada. Para isso, basta ver que

$$|L_{z_1}(z_1, z_2, u)| = 4 |z_1^2 - z_2^5| |z_1| |u|^{22},$$

e fazendo $z_1 = \delta^5$, $z_2 = c\delta^2$, $u = \delta^{-1}$ com $\delta > 0$ e $c \neq 1$ vem que

$$L(z_1, z_2, u) = \frac{|1 - c^5|^2}{\delta^2} + \frac{\varepsilon_1}{\delta^2} + \varepsilon_2, \quad |L_{z_1}(z_1, z_2, u)| = \frac{4 |1 - c^5|}{\delta^7}.$$

Admitindo a validade de (H3), teríamos então

$$\frac{4 |1 - c^5|}{\delta^{7+\mu}} \leq \gamma \left(\frac{|1 - c^5|^2}{\delta^2} + \frac{\varepsilon_1}{\delta^2} + \varepsilon_2 \right)^\beta + \eta, \quad (4.40)$$

com $\gamma > 0$, $\beta < 2$ e $\mu \in [\beta - 1, +\infty[\cap [-1, +\infty[$. Vejamos que tal não é com certeza verdade para δ suficientemente próximo de zero:

- se $\beta \leq 0$, $\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{4 |1 - c^5|}{\delta^{7+\mu}} = +\infty$ enquanto

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\gamma \frac{(|1 - c^5|^2 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \delta^2)^\beta}{\delta^{2\beta}} + \eta \right) = \begin{cases} \eta & \text{se } \beta \neq 0 \\ \gamma + \eta & \text{se } \beta = 0 \end{cases};$$

- senão ($\beta > 0$), multiplicando ambos os lados da desigualdade (4.40) por $\delta^{2\beta}$

$$\frac{4 |1 - c^5|}{\delta^{7+\mu-2\beta}} \leq \gamma (|1 - c^5|^2 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \delta^2)^\beta + \eta \delta^{2\beta}. \quad (4.41)$$

Uma vez que $7 + \mu - 2\beta \geq 6 - 2\beta \stackrel{(\beta < 2)}{>} 0$, teríamos $\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{4 |1 - c^5|}{\delta^{7+\mu-2\beta}} = +\infty$

enquanto o lado direito de (4.41) tenderia a $\gamma (|1 - c^5|^2 + \varepsilon_1)^\beta$. Concluímos assim que o Teorema 53 não pode ser aplicado nesta situação.

Conclusão

“A perspectiva vale cinquenta pontos de QI.”

Alan Kay

(citado por Nicholas Negroponto em *Ser Digital*, ed. Caminho, 1996, p. 256)

A abordagem hamiltoniana à questão da regularidade revelou-se, na nossa opinião, bastante efectiva e quicá promissora no esclarecimento de algumas questões ainda em aberto. Uma teoria de regularidade Lipschitziana para problemas de controlo óptimo, é algo que até à data presente constitui uma área de investigação totalmente a desenvolver. Os únicos esforços neste sentido, tanto quanto nos é dado a conhecer, podem ser encontrados em [11]. No entanto nesse artigo Clarke e Vinter consideram problemas em que o sistema de controlo é linear e invariante no tempo e o resultado obtido não se coloca completamente no paradigma do controlo óptimo: a regularidade dos controlos extremantes é obtida à custa das propriedades dos minimizantes para problemas do Cálculo

das Variações envolvendo derivadas de ordem superior.

Estamos convencidos que o raciocínio exposto no capítulo 4, quando aplicado ao problema de Lagrange do Controlo Óptimo:

$$J[x(\cdot), u(\cdot)] = \int_a^b L(t, x(t), u(t)) dt \rightarrow \min$$

$$\dot{x}(t) = \varphi(t, x(t), u(t)) \quad (4.42)$$

$$x(a) = x_a, \quad x(b) = x_b,$$

é uma fonte promissora de novas condições de regularidade. Por exemplo, temos resultados preliminares e respostas parciais para o caso quando o sistema (4.42) é autónomo e afim de controlo:

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t)) u(t).$$

Será esta a direcção do nosso trabalho futuro.

Apêndices

“ ... não se permita nenhuma alusão, nenhuma referência, sem as explicar. É preferível dar precisões inúteis do que correr o risco de falar no vazio.”

Reneé Simonet

(Como falar em Público, ed. Cetop, 1989, p. 82)

Apêndice A

Resultados e noções auxiliares da Parte I

A.1 Complemento ao Capítulo 1

Definição 56 A classe das funções contínuas $x : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ será denotada por $C(A, \mathbb{R}^n)$. Se k é um inteiro, com $k \geq 1$, e Ω é um conjunto aberto não vazio de \mathbb{R}^n então denotamos por $C^k(\Omega, \mathbb{R}^n)$ a classe das funções $x : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ que são continuamente diferenciáveis em Ω até à ordem k . $C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n) = \bigcap_{k \geq 1} C^k(\Omega, \mathbb{R}^n)$ é a classe das funções $x : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ que são continuamente diferenciáveis tantas vezes quanto se queira. Suponhamos que $\Omega \subset A \subseteq \bar{\Omega}$. Dizemos que $x : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ é da classe $C^k(A, \mathbb{R}^n)$ para $1 \leq k \leq \infty$, se $y(\cdot) = x(\cdot)|_\Omega \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^n)$ e se $y(\cdot), \dot{y}(\cdot), \dots, y^{(i)}(\cdot), \dots, 0 \leq i \leq k$ podem ser estendidas de Ω a aplicações contínuas de A . Aqui $y^{(i)}(\cdot)$ é o i -ésimo diferencial de $y(\cdot)$, consistindo de todas as suas derivadas parciais de ordem i . \square

Definição 57 Seja $F = [a, b]$ um intervalo fechado de \mathbb{R} . Dizemos que $x : F \rightarrow \mathbb{R}^n$ é seccionalmente contínua ou que pertence à classe $PC(F, \mathbb{R}^n)$, se existir uma decomposição

$$a = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_v = b \quad (\text{A.1})$$

de F tal que a restrição $x(\cdot)|_{[\xi_{j-1}, \xi_j]}$ pode ser estendida a uma função contínua $[\xi_{j-1}, \xi_j] \rightarrow \mathbb{R}^n$ para todo $j = 1, \dots, v$. Além disso, dizemos que $x : F \rightarrow \mathbb{R}^n$ é da classe $PC^1(F, \mathbb{R}^n)$, se $x(\cdot)$ é contínua em F e se existe uma decomposição (A.1) de F tal que as restrições $x(\cdot)|_{[\xi_{j-1}, \xi_j]}$ são da classe $C^1([\xi_{j-1}, \xi_j], \mathbb{R}^n)$. \square

Observação 58 Quando não houver lugar a ambiguidades, representamos uma classe do tipo $P(A, \mathbb{R}^n)$ apenas por P . \square

Definição 59 *Seja K um intervalo finito ou infinito de \mathbb{R} e suponhamos que $x : K \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função com a seguinte propriedade: existe uma constante $c > 0$ tal que*

$$\|x(t) - x(t')\| \leq c |t - t'| \quad \text{para todo } t, t' \in K.$$

Dizemos então que $x(\cdot)$ é lipschitziana. Resulta claro que toda a função lipschitziana é contínua. Se Ω for um conjunto limitado aberto, definimos $\text{Lip}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ como a classe de funções $y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ para as quais existe uma constante $c = c[y(\cdot)]$ tal que

$$\|y(t) - y(t')\| \leq c |t - t'| \quad \text{para todo } t, t' \in \Omega.$$

Uma tal função $y(\cdot)$ diz-se localmente lipschitziana, se para cada ponto $t \in \Omega$ existe uma vizinhança de t na qual $y(\cdot)$ é lipschitziana. (A constante de Lipschitz pode variar com o ponto t .) \square

Observação 60 *Se $x(\cdot)$ é da classe C^1 num intervalo de K , segue-se de imediato do teorema do valor médio que $x(\cdot)$ é localmente lipschitziana.* \square

Definição 61 *Uma função $f(\cdot)$ definida em $[a, b]$ diz-se absolutamente contínua neste segmento, quando para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, de tal modo que para qualquer família finita de intervalos disjuntos dois a dois,*

$$(a_i, b_i), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

pertencentes a $[a, b]$,

$$\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta \Rightarrow \sum_{i=1}^n \|f(b_i) - f(a_i)\| < \varepsilon. \quad (\text{A.2})$$

Denotamos por $AC([a, b], \mathbb{R}^n)$ a classe constituída por todas essas funções. \square

Observação 62 *Resulta claro da definição, que toda a função absolutamente contínua é contínua.* \square

Observação 63 *Se $f(\cdot)$ é lipschitziana em $[a, b]$ (com constante de Lipschitz c), então $f(\cdot)$ é absolutamente contínua em $[a, b]$. Com efeito, se $c = 0$ então $f(\cdot) \equiv \text{const}$ e (A.2) é verdadeira para $\delta > 0$ arbitrário. Se $c > 0$, basta escolher $\delta = \frac{\varepsilon}{c}$.* \square

Algumas propriedades das funções absolutamente contínuas incluem:

Teorema 64 ([13, Teoremas 8.24 e 8.32]) *Uma função absolutamente contínua em $[a, b]$ tem derivada finita em q.t.p. de $[a, b]$.* \blacksquare

Teorema 65 ([18, Teorema 2, p. 387]) *Toda a função*

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt,$$

com $f(\cdot)$ uma função integrável (à Lebesgue), é absolutamente contínua. ■

Teorema 66 ([18, Teorema 1, p. 379]) *Se $f(\cdot)$ é uma função integrável (à Lebesgue), verifica-se em q.t.p. a seguinte igualdade:*

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x).$$

■

No Capítulo 1, parágrafo 1.3.2, precisamos de diferenciar um integral em relação a um parâmetro. Temos o seguinte Teorema clássico:

Teorema 67 *Sejam dados dois intervalos I_1 e I_2 em \mathbb{R} e três funções $f : I_1 \times I_2 \rightarrow \mathbb{R}$, $g : I_2 \rightarrow I_1$ e $h : I_2 \rightarrow I_1$ com valores denotados por $f(t, \alpha)$, $g(\alpha)$ e $h(\alpha)$. Se supusermos que $f(\cdot, \cdot)$ e a sua derivada parcial $f_\alpha(\cdot, \cdot)$ são ambas contínuas em $I_1 \times I_2$ e que $g(\cdot)$ e $h(\cdot)$ têm derivadas finitas num ponto $\beta \in I_2$, então a função $F : I_2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$F(\alpha) = \int_{g(\alpha)}^{h(\alpha)} f(t, \alpha) dt$$

tem derivada finita em β e

$$F'(\beta) = \int_{g(\beta)}^{h(\beta)} f_\alpha(t, \alpha) dt + f(h(\beta), \beta) h'(\beta) - f(g(\beta), \beta) g'(\beta).$$

■

No nosso caso, precisamos da derivada de

$$g(\varepsilon) = \int_a^b L\left(t, x(t) + \varepsilon h(t), \dot{x}(t) + \varepsilon \dot{h}(t)\right) dt.$$

onde $L(\cdot, \cdot, \cdot) \in C^2$. Aqui a função integranda satisfaz as hipóteses do Teorema 67 sse $(x + \varepsilon h)(\cdot) \in C^1([a, b])$. Em geral (por exemplo se $x(\cdot) \in PC^1$ ou se $x(\cdot) \in Lip$) $(\dot{x} + \varepsilon \dot{h})(\cdot)$ tem descontinuidades num número contável de pontos interiores

$$c_1, \dots, c_n$$

do intervalo $[a, b]$. Fazendo $c_0 = a$ e $c_{n+1} = b$, podemos exprimir o integral como a soma de integrais nos intervalos $[c_{i-1}, c_i]$, $i = 1, \dots, n+1$. As hipóteses do Teorema 67 embora não satisfeitas no intervalo $[a, b]$, são satisfeitas em cada um dos sub intervalos $[c_{i-1}, c_i]$, desde que interpretemos $\dot{x}(c_{i-1})$ como $\dot{x}^+(c_{i-1})$ e $\dot{x}(c_i)$ como $\dot{x}^-(c_i)$. Os $n+1$ integrais obtidos pelo Teorema 67 como derivadas dos integrais separados, podem depois ser combinados num único integral sobre $[a, b]$ obtendo exactamente o que teríamos obtido se tivéssemos aplicado a conclusão do Teorema 67 ao integral original sem justificação.

A.2 Complemento ao Capítulo 2

Definição 68 *Seja X é um conjunto arbitrário e $(M, \rho(\cdot, \cdot))$ um espaço métrico. Dizemos que uma sucessão de aplicações $f_n : X \rightarrow M$ converge:*

- simplesmente (ou pontualmente) em X para a aplicação $f : X \rightarrow M$ quando, para cada $x \in X$, a sucessão $(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots)$ tem limite $f(x)$ em M . Ou seja, para cada $x \in X$, tem-se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x).$$

Isto significa que dados arbitrariamente $x \in X$ e $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ (dependendo de x e de ε) tal que $n > n_0 \Rightarrow \rho(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$.

- uniformemente em X para a aplicação $f : X \rightarrow M$ quando, para todo o número real $\varepsilon > 0$ dado, for possível obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow \rho(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$, qualquer que seja $x \in X$. \square

Observação 69 *Se $f_n(\cdot) \rightarrow f(\cdot)$ (leia-se, $f_n(\cdot)$ converge para $f(\cdot)$) uniformemente em X , então $f_n(\cdot) \rightarrow f(\cdot)$ simplesmente em X . Em particular, se sabemos que $f_n(\cdot) \rightarrow f(\cdot)$ simplesmente em X , então $(f_n(\cdot))$ não pode convergir uniformemente em X para outra aplicação que não seja $f(\cdot)$. \square*

Definição 70 *Dado um espaço métrico $(X, \rho(\cdot, \cdot))$, uma função $f(\cdot)$ de X em \mathbb{R} diz-se semi-contínua inferior em $x_0 \in X$ se*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tal que}$$

$$\forall x \in B(x_0; \delta), \quad f(x_0) - \varepsilon \leq f(x).$$

Dizemos ainda que $f(\cdot)$ é semi-contínua inferior, se $f(\cdot)$ é semi-contínua inferior em todos os pontos de X . \square

Teorema 71 *Uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ semi-contínua inferior, atinge o mínimo finito em qualquer compacto $K \subset \mathbb{R}^n$.*

Prova: seja μ (finito ou infinito) o ínfimo da função $f(\cdot)$ no compacto K :

$$\mu = \inf_{x \in K} \{f(x)\}.$$

Então existe uma sucessão $\{x^m\}$ de pontos em K , tal que

$$f(x^m) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \mu.$$

Como K é compacto, existe uma subsucessão convergente ([22, proposição 7, p. 222]). Podemos pensar que $\{x^m\}$ é convergente:

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} x^m = \underline{x}.$$

Consideremos $f(\underline{x})$. Só falta demonstrar que $f(\underline{x}) = \mu$. Uma vez que μ é ínfimo, $f(\underline{x}) \geq \mu$. Admitamos que $f(\underline{x}) = \mu'$ e $\mu' - \varepsilon \geq \mu$. Atendendo à semi-continuidade inferior de $f(\cdot)$, $\exists N_\varepsilon > 0$ tal que

$$\forall m > N_\varepsilon \quad f(x^m) \geq f(\underline{x}) - \frac{\varepsilon}{2} \geq \mu + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Isto entra em contradição com o facto do

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} f(x^m) = \mu.$$

Então

$$\inf_{x \in K} \{f(x)\} = f(\underline{x}) = \mu,$$

ou seja, \underline{x} é ponto de mínimo. ■

Definição 72 (espaços L_p) *Seja p um número real positivo ≥ 1 e seja $x(\cdot)$ uma função de valor real, mensurável, definida em $[a, b]$, e tal que*

$$\int_a^b |x(t)|^p dt < +\infty.$$

Dizemos então que $x(\cdot)$ pertence à classe L_p . A norma $\|x(\cdot)\|_p$ é definida por

$$\|x(\cdot)\|_p = \left(\int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{1/p}.$$

□

Observação 73 *Se duas funções em L_p coincidem excepto num conjunto de medida zero, consideramo-las como representando o mesmo elemento de L_p . Por outras palavras, se escrevermos $f(\cdot) \sim g(\cdot)$ quando, e só quando, $f(t) = g(t)$ em q.t.p. $t \in [a, b]$, então \sim define uma relação de equivalência e os elementos de L_p são na verdade classes de equivalência de funções, as funções numa qualquer classe diferindo apenas em conjuntos de medida nula. Referir-nos-emos a uma função $x(\cdot) \in L_p$ em vez da classe de equivalência contendo $x(\cdot)$.* □

Definição 74 Um conjunto $C \subseteq \mathbb{R}^n$ diz-se convexo se para qualquer x e y em C todos os pontos do segmento de recta que une x a y também pertencem a C . \square

Definição 75 Sejam $f(\cdot)$ uma função de valor real definida num conjunto convexo C ; $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ números não negativos com soma 1; e x_1, \dots, x_n pontos arbitrários de C . Então:

- a função $f(\cdot)$ é convexa se

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i). \quad (\text{A.3})$$

- a função $f(\cdot)$ é estritamente convexa se for convexa e quando todos os λ_i 's forem positivos, então a igualdade em (A.3) verifica-se se e somente se todos os x_i 's forem iguais. \square

Teorema 76 (Desigualdade da Média Aritmética-Geométrica) Se x_1, \dots, x_n são números reais positivos e se $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ forem números positivos com soma 1, então

$$\prod_{i=1}^n (x_i)^{\lambda_i} \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i.$$

Prova: A função $f(\cdot)$ definida para $x > 0$ por

$$f(x) = -\ln(x)$$

é estritamente convexa uma vez que $\ddot{f}(x) = \frac{1}{x^2} > 0$. Então

$$-\ln\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) = f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) = -\sum_{i=1}^n \lambda_i \ln(x_i).$$

Esta desigualdade é equivalente a

$$\ln\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \geq \sum_{i=1}^n \lambda_i \ln(x_i) = \ln\left(\prod_{i=1}^n x_i^{\lambda_i}\right)$$

e atendendo a que a função logarítmica é estritamente crescente, obtemos a desigualdade pretendida:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \geq \prod_{i=1}^n x_i^{\lambda_i}.$$



Corolário 77 (Desigualdade de Young) Para quaisquer $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $p > 1$ e número q definido pela igualdade

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad (\text{A.4})$$

é válida a desigualdade

$$\alpha \beta \leq \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}. \quad (\text{A.5})$$

Prova: Fazemos $x = \alpha^p$ e $y = \beta^q$. Então x e y são números positivos e dado (A.4) a desigualdade da Média Aritmética-Geométrica pode ser aplicada como se segue:

$$\alpha \beta = x^{1/p} y^{1/q} \leq \frac{x}{p} + \frac{y}{q} = \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}.$$

Corolário 78 (Desigualdade de Hölder) Sejam $f(\cdot)$ e $g(\cdot)$ duas funções de valor real definidas e integráveis sobre o segmento $[a, b]$, $1 < p < +\infty$ e q um número definido pela igualdade

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \quad (\text{A.6})$$

Temos então que

$$\int_a^b |f(\tau) g(\tau)| d\tau \leq \left[\int_a^b |f(\tau)|^p d\tau \right]^{1/p} \cdot \left[\int_a^b |g(\tau)|^q d\tau \right]^{1/q}. \quad (\text{A.7})$$

Prova: Na desigualdade (A.5) do resultado anterior, fazemos

$$\alpha = \frac{|f(\tau)|}{\|f(\cdot)\|_p}, \quad \beta = \frac{|g(\tau)|}{\|g(\cdot)\|_q}, \quad \tau \in [a, b],$$

onde

$$\|f(\cdot)\|_p = \left[\int_a^b |f(t)|^p dt \right]^{1/p} \quad \text{e} \quad \|g(\cdot)\|_q = \left[\int_a^b |g(t)|^q dt \right]^{1/q}. \quad (\text{A.8})$$

Então, qualquer que seja o $\tau \in [a, b]$,

$$\frac{|f(\tau)|}{\|f(\cdot)\|_p} \cdot \frac{|g(\tau)|}{\|g(\cdot)\|_q} \leq \frac{1}{p} \frac{|f(\tau)|^p}{\|f(\cdot)\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|g(\tau)|^q}{\|g(\cdot)\|_q^q}.$$

Integrando esta desigualdade em relação ao segmento $[a, b]$ e utilizando (A.8) e (A.6) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|f(\cdot)\|_p \|g(\cdot)\|_q} \int_a^b |f(\tau) g(\tau)| d\tau &\leq \frac{1}{p \|f(\cdot)\|_p^p} \int_a^b |f(\tau)|^p d\tau + \\ &+ \frac{1}{q \|g(\cdot)\|_q^q} \int_a^b |g(\tau)|^q d\tau = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \end{aligned}$$

Assim,

$$\int_a^b |f(\tau) g(\tau)| d\tau \leq \|f(\cdot)\|_p \|g(\cdot)\|_q,$$

isto é, a desigualdade (A.7) fica demonstrada. ■

Corolário 79 (Desigualdade de Minkowski) *Sejam $f(\cdot)$ e $g(\cdot)$ duas funções de valor real definidas e integráveis sobre o segmento $[a, b]$. Para $p > 1$ vale a desigualdade:*

$$\left[\int_a^b |f(\tau) + g(\tau)|^p d\tau \right]^{1/p} \leq \left[\int_a^b |f(\tau)|^p d\tau \right]^{1/p} + \left[\int_a^b |g(\tau)|^p d\tau \right]^{1/p}. \quad (\text{A.9})$$

Prova: Começemos por notar que

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(\tau) + g(\tau)|^p d\tau &= \int_a^b |f(\tau) + g(\tau)| \cdot |f(\tau) + g(\tau)|^{p-1} d\tau \leq \\ &\leq \int_a^b |f(\tau)| \cdot |f(\tau) + g(\tau)|^{p-1} d\tau + \int_a^b |g(\tau)| \cdot |f(\tau) + g(\tau)|^{p-1} d\tau. \end{aligned}$$

Aplicando, a cada um dos dois últimos integrais, a desigualdade de Hölder, e observando que

$$\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} \Leftrightarrow q = \frac{p}{p-1} \Leftrightarrow q(p-1) = p,$$

obtemos:

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(\tau) + g(\tau)|^p d\tau &\leq \left[\int_a^b |f(\tau)|^p d\tau \right]^{1/p} \cdot \left[\int_a^b |f(\tau) + g(\tau)|^{q(p-1)} d\tau \right]^{1/q} + \\ &+ \left[\int_a^b |g(\tau)|^p d\tau \right]^{1/p} \cdot \left[\int_a^b |f(\tau) + g(\tau)|^{q(p-1)} d\tau \right]^{1/q} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \int_a^b |f(\tau) + g(\tau)|^p d\tau \leq \left(\left[\int_a^b |f(\tau)|^p d\tau \right]^{1/p} + \left[\int_a^b |g(\tau)|^p d\tau \right]^{1/p} \right) \cdot \left[\int_a^b |f(\tau) + g(\tau)|^p d\tau \right]^{1/q}. \quad (\text{A.10})$$

Se o primeiro membro de (A.10) é igual a zero, então a desigualdade (A.9) é com toda a certeza válida. Se não é igual a zero, então dividindo ambos os membros da desigualdade (A.10) pelo factor

$$\left[\int_a^b |f(\tau) + g(\tau)|^p d\tau \right]^{1/q},$$

e atendendo a que

$$1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p},$$

obtemos a desigualdade pretendida. ■

Definição 80 *Seja $(M, \rho(\cdot, \cdot))$ um espaço métrico e X um subconjunto de M :*

- Dizemos que α é aderente a X se para todo o $\varepsilon > 0$, temos $B(\alpha; \varepsilon) \cap X \neq \emptyset$;
- O fecho ou aderência de X é o conjunto \overline{X} dos pontos de M que são aderentes a X ;
- Dizemos que um ponto $\alpha \in M$ é ponto de acumulação de X quando toda a bola de centro α contém algum ponto de X diferente de α . Notar que o ponto α pode ou não pertencer ao conjunto X ;
- Ao conjunto de todos os pontos de acumulação de X em $(M, \rho(\cdot, \cdot))$ chamamos derivado do conjunto X e denotamo-lo por X' ;
- Se um ponto α pertence a X mas não é um ponto de acumulação de X , dizemos que α é um ponto isolado do conjunto X ;
- Dizemos que X é fechado quando $X' \subseteq X$. □

Definição 81 *Sejam A e B dois conjuntos de um espaço métrico $(M, \rho(\cdot, \cdot))$. O conjunto A diz-se denso em B , quando*

$$\overline{A} \supseteq B.$$

Em particular:

- o conjunto A é denso em um todo, quando a sua aderência \overline{A} coincide com todo o espaço M ;

- A é denso em si mesmo quando $A \subseteq A'$. □

Definição 82 Dizemos que X é perfeito quando $X = X'$. Por outras palavras, um conjunto é perfeito quando for simultaneamente fechado e denso em si mesmo: quando contém todos os seus pontos de acumulação e não tem pontos isolados. □

Para funções definidas num segmento, tem lugar o seguinte teorema que diz que uma função mensurável se pode converter numa função contínua em $[a, b]$ variando os seus valores num conjunto de medida tão pequena quanto se queira.

Teorema 83 (Teorema de Lusin) ([20, p. 266]) Para que uma função $f(\cdot)$ definida num segmento $[a, b]$ seja mensurável, é necessário e suficiente que para qualquer $\varepsilon > 0$ exista uma função $\varphi(\cdot)$ contínua em $[a, b]$ tal que

$$m \{x : f(x) \neq \varphi(x)\} < \varepsilon.$$

■

Definição 84 Seja $f(\cdot)$ uma função de valor real definida num intervalo $[a, b]$. Para cada partição $P : a = t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$ seja

$$V_a^b(f, P) = \sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})|.$$

Ao valor $V_a^b f$ definido por

$$V_a^b f = \sup \left\{ V_a^b(f, P) : P \text{ é uma partição de } [a, b] \right\}$$

chamamos variação total de $f(\cdot)$. Quando $V_a^b f < +\infty$, dizemos que $f(\cdot)$ é uma função de variação limitada em $[a, b]$. □

Seguem-se algumas propriedades das funções de variação limitada: (A prova de tais afirmações podem ser encontradas, por exemplo, em [13])

Teorema 85 • A ~~des~~igualdade

$$V_a^c f + V_c^b f = V_a^b f$$

é verdadeira para todo o $c \in [a, b]$;

- $V_a^t f$ é uma função em t não decrescente;
- $f(\cdot)$ é uma função de variação limitada sse ela poder ser escrita como a diferença de duas funções não decrescentes;

- Uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de variação limitada tem derivada finita em q.t.p. de $[a, b]$;
- Uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de variação limitada tem apenas descontinuidades de salto e elas são em número contável.¹
- Se $f(\cdot)$ é uma função absolutamente contínua em $[a, b]$, então $f(\cdot)$ é uma função de variação limitada em $[a, b]$. \square

A.3 Complemento ao Capítulo 3

Definição 86 Um subconjunto X de um espaço métrico M diz-se magro em M , quando é dado por uma reunião numerável

$$X = \bigcup_{n=1}^{+\infty} X_n$$

tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\text{int } \bar{X}_n = \emptyset$. \square

Teorema 87 (Teorema de Baire) ([22, Proposição 19, p. 190]) Seja M um espaço métrico completo. Todo o conjunto magro em M tem interior vazio. \blacksquare

Definição 88 (espaços L_∞) Uma função $x(\cdot)$ mensurável em $[a, b]$ e de valor real é dita de essencialmente limitada, se, e somente se, existir um $M \geq 0$ tal que o conjunto $\{t : x(t) \geq M\}$ tem medida nula. Por outras palavras, $x(\cdot)$ é essencialmente limitada sse, para algum M , a desigualdade $|x(t)| \leq M$ é verificada em q.t.p. t de $[a, b]$. A norma $\|x(\cdot)\|_\infty$ de uma função essencialmente limitada é definida por

$$\|x(\cdot)\|_\infty = \inf \{M : m(\{t : |x(t)| \geq M\}) = 0\}.$$

Esta norma é chamada de norma essencial, sendo usualmente denotada por

$$\|x(\cdot)\|_\infty = \sup_{t \in [a, b]} \text{ess } |x(t)|.$$

\square

Observação 89 Uma consequência directa da definição de $\|x(\cdot)\|_\infty$ é a de que para todo o $\varepsilon > 0$, o conjunto $\{t : |x(t)| > \|x(\cdot)\|_\infty - \varepsilon\}$ tem medida positiva. \square

¹ Dizemos que $f(\cdot)$ tem uma descontinuidade de salto em $t = t_0$ se

$$\lim_{t \rightarrow t_0^+} f(t) = f(t_0^+), \quad \lim_{t \rightarrow t_0^-} f(t) = f(t_0^-)$$

$$\text{e } f(t_0^+) \neq f(t_0^-).$$

Observação 90 *Tal como no caso dos espaços L_p , identificamos duas funções em L_∞ como a mesma, se elas tomarem valores iguais quase sempre.* \square

Teorema 91 (Teorema da função implícita) *Sejam $f()$ uma função definida numa vizinhança Ω do ponto $(x_0, y_0) = (x_0^1, \dots, x_0^n, y_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ e Ξ o conjunto dos pontos (x^1, \dots, x^n, y) satisfazendo a equação*

$$f(x^1, \dots, x^n, y) = 0.$$

Se todas as derivadas parciais de primeira ordem de $f()$ são contínuas em Ω e

$$f(x_0, y_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0) \neq 0,$$

então existe um paralelepípedo

$$\Delta = \left\{ \left| x^j - x_0^j \right| < a, \quad j = 1, \dots, n, \quad |y - y_0| < b \right\}$$

tal que $\Xi \cap \Delta$ é o gráfico de uma função

$$y = \psi(x^1, \dots, x^n)$$

definida e possuindo derivadas parciais de primeira ordem contínuas no conjunto

$$\Delta^0 = \left\{ \left| x^j - x_0^j \right| < a, \quad j = 1, \dots, n \right\}.$$

Para cada $x \in \Delta^0$ e $j = 1, \dots, n$, tem-se

$$\frac{\partial \psi}{\partial x^j}(x) = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x^j}(x, \psi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \psi(x))}.$$

\square

Teorema 92 (Teorema da função inversa) *Sejam Ω um aberto de \mathbb{R}^n e A uma aplicação de Ω em \mathbb{R}^n . Se $A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ é continuamente diferenciável e o determinante jacobiano de A não é nulo no ponto $x \in \Omega$, então existe uma vizinhança V de x tal que a restrição de A a V possui uma inversa continuamente diferenciável definida em $A(V)$. (Em particular, a restrição de A a V é uma aplicação biunívoca.)* \square

Definição 93 *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ e $V \subset \mathbb{R}^m$ conjuntos abertos e $f : U \rightarrow V$ uma aplicação bijectiva. Diz-se que $f(\cdot)$ é um difeomorfismo de classe C^k se tanto $f(\cdot)$ como $f^{-1}(\cdot)$ são aplicações de classe C^k .* \square

Seja $f(\cdot)$ uma função de valor real definida em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e pertencente à classe C^s com $s \geq 2$. Definamos então a aplicação $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ fazendo

$$\varphi(x) = f_x(x), \quad x \in \Omega,$$

onde $f_x(\cdot)$ denota o gradiente de $f(\cdot)$:

$$f_x(x) = (f_{x^1}(x), f_{x^2}(x), \dots, f_{x^n}(x)).$$

Claramente, $\varphi(\cdot) \in C^{s-1}(\Omega, \mathbb{R}^n)$.

Teorema 94 *A aplicação gradiente $\varphi(\cdot)$ é localmente invertível se a matriz Hessiana for não singular:*

$$\det f_{xx}(x) = \det \begin{bmatrix} f_{x^1x^1}(x) & \cdots & f_{x^1x^n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x^nx^1}(x) & \cdots & f_{x^nx^n}(x) \end{bmatrix} \neq 0, \quad \text{para todo } x \in \Omega. \quad (\text{A.11})$$

Se Ω é convexo e se a matriz Hessiana $f_{xx}(x)$ é definida positiva para $x \in \Omega$:

$$f_{xx}(x) > 0, \quad \forall x \in \Omega$$

então $\varphi(\cdot)$ é um difeomorfismo C^{s-1} de Ω em $\varphi(\Omega)$.

Prova: Se se verifica a condição dada por (A.11), então $\varphi(\cdot)$ fornece localmente um difeomorfismo C^{s-1} , por causa do teorema da função inversa. Assim, só temos de mostrar que $\varphi(\cdot)$ é injectiva quando Ω é convexo e $f_{xx}(x) > 0 \forall x \in \Omega$. Suponhamos que $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$ para determinados $x_1, x_2 \in \Omega$ e façamos $x = x_1 - x_2$. Uma vez que Ω é convexo, os pontos $x_1 + tx$, $0 \leq t \leq 1$, estão contidos em Ω . Então, $A(t) = f_{xx}(x_1 + tx)$ define uma função contínua de valor matricial para $t \in [0, 1]$, com $A(t) > 0$. Atendendo a que

$$\begin{aligned} 0 &= \langle x, \varphi(x_2) - \varphi(x_1) \rangle = \left\langle x, \int_0^1 \frac{d}{dt} \varphi(x_1 + tx) dt \right\rangle = \\ &= \int_0^1 \langle x, A(t) x \rangle, \end{aligned}$$

deduzimos que $x = 0$, i.e., $x_1 = x_2$, o que prova que $\varphi(\cdot)$ é injectiva. ■

Apêndice B

Resultados e noções auxiliares da Parte II

B.1 Exposição do Problema de Tempo Mínimo

Considere-se a seguinte equação diferencial em \mathbb{R}^n

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad (B.1)$$

a que chamaremos a *equação de controlo*. À variável

$$x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

chamamos *estado*, o parâmetro

$$u = \begin{pmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^r \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^r$$

será chamado *parâmetro de controlo*, enquanto o vector

$$f(t, x, u) = \begin{pmatrix} f^1(t, x, u) \\ \vdots \\ f^n(t, x, u) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

será denominado *vector velocidade*. Assumimos que f é uma *função contínua* em

$$\mathbb{R}^{1+n+r} = \{(t, x, u) : t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^r\},$$

e que ela tem derivada contínua com respeito a x :

$$\frac{\partial f(t, x, u)}{\partial x} = \left(\frac{\partial f(t, x, u)}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial f(t, x, u)}{\partial x^n} \right).$$

Um conjunto arbitrário

$$U \subset \mathbb{R}^r$$

é dado no “espaço dos parâmetros” \mathbb{R}^r . Dizemos que U é o conjunto dos valores admissíveis do parâmetro de controlo. A uma função mensurável e limitada arbitrária, $u(t)$, que é definida em \mathbb{R} e com valores no conjunto U , chamamos controlo admissível. Designamos o conjunto de todos os controlos admissíveis por classe de controlos admissíveis, e denotamo-la por Ω_U .

Se um controlo admissível arbitrário $u(t)$ substituir o parâmetro u na equação de controlo (B.1), obteremos a equação diferencial

$$\dot{x} = f(t, x, u(t)) = F(t, x),$$

cujos membros direito $F(t, x)$ é continuamente diferenciável com respeito a x (t fixo) e mensurável com respeito a t (x fixo). Dizemos que uma função absolutamente contínua

$$x(t), \quad a \leq t \leq b,$$

é solução desta equação no intervalo $a \leq t \leq b$ se ela satisfaz a igualdade

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) = F(t, x(t))$$

para quase todos os $t \in [a, b]$.

Além disso, se $u_1(t)$ e $u_2(t)$ coincidem para quase todos os $t \in \mathbb{R}$, as equações diferenciais

$$\dot{x} = f(t, x, u_1(t)) \quad \text{e} \quad \dot{x} = f(t, x, u_2(t))$$

são equivalentes.

Um sistema de controlo é dado por uma equação de controlo (B.1) e uma classe de controlos admissíveis Ω_U . Tal sistema será caracterizado em cada instante t pela variável de estado x , e o seu comportamento pode ser influenciado pela escolha de um controlo admissível $u(t) \in \Omega_U$. Se, no instante de tempo $t = a$, o estado inicial x_a do sistema é dado e o controlo $u(t)$ é escolhido, então o comportamento do sistema é determinado unicamente como sendo a solução da equação

$$\dot{x} = f(t, x, u(t)).$$

Um problema de tempo mínimo com pontos de fronteira fixos é formulado como se segue:

São dados dois pontos x_a e x_b no espaço das variáveis de estado \mathbb{R}^n e um instante de tempo, $t = a$, que constitui o tempo inicial. O objectivo é escolher um controlo admissível

$$\hat{u}(t) \in \Omega_U$$

de uma maneira tal que a equação diferencial

$$\dot{x} = f(t, x, \hat{u}(t))$$

tenha uma solução $\hat{x}(t)$ definida no intervalo de tempo $a \leq t \leq T$, satisfazendo as condições de fronteira

$$\hat{x}(a) = x_a, \quad \hat{x}(T) = x_b,$$

e tal que o tempo de transferência do sistema de controlo do estado x_a para o estado x_b seja mínimo:

$$T - a \rightarrow \min,$$

ou o que é equivalente

$$T \rightarrow \min.$$

Deste modo, se, para qualquer outro controlo admissível $\tilde{u}(t)$, existir uma solução $\tilde{x}(t)$, $a \leq t \leq \tilde{T}$, da equação

$$\dot{x} = f(t, x, \tilde{u}(t))$$

que satisfaz as mesmas condições de fronteira

$$\tilde{x}(a) = x_a, \quad \tilde{x}(\tilde{T}) = x_b,$$

teremos $\tilde{T} \geq T$.

O controlo $\hat{u}(t)$ é designado por *controlo óptimo*, enquanto a $\hat{x}(t)$ chamamos *trajectória óptima*. O valor de $T - a$ representa o *tempo de transferência mínimo* de x_a para x_b com a condição inicial $x(a) = x_a$. Ao par $(\hat{x}(t), \hat{u}(t))$ com $a \leq t \leq T$, chamamos *processo óptimo* ou *solução óptima*, para o problema de tempo mínimo:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x, u), & u(t) &\in \Omega_U, & t &= a, \\ x(a) &= x_a, & x(T) &= x_b & T &\rightarrow \min. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Notar que os valores a , $x(a)$, e $x(T)$ são dados e constituem aquilo a que se chama as condições de fronteira do problema; enquanto o valor de T não. No caso da equação de controlo (B.1) ser *autónoma*, i.e., quando o seu membro direito não depende da variável de tempo t , o facto do tempo inicial a estar fixo é desprovido de qualquer significado.

B.2 Miscelânea

Definição 95 *Um homeomorfismo entre dois espaços topológicos M e N , é uma bijecção contínua $p : M \rightarrow N$, cuja inversa $p^{-1} : N \rightarrow M$ é também contínua. Dizemos então que M e N são homeomorfos. Neste caso, M é compacto se e somente se N o é.* \square

Exemplo 96 (*Exemplo de um homeomorfismo - Projecção Estereográfica*)
Sejam $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$ a esfera unitária n -dimensional e

$$p = (0, \dots, 0, 1) \in S^n$$

o seu pólo norte. A projecção estereográfica $\pi : S^n \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ estabelece um homeomorfismo entre a esfera menos o pólo norte e o espaço euclidiano \mathbb{R}^n . A projecção estereográfica da esfera no plano, foi provavelmente descoberta por Hiparco (160 a.c.); a designação “projecção estereográfica” foi introduzida por d’Aguillon em 1613. Geometricamente, $\pi(x)$ é o ponto em que a semi-recta \overrightarrow{px} encontra o hiperplano $x^{n+1} = 0$, que identificamos com \mathbb{R}^n . A fim de obter uma fórmula para $\pi(\cdot)$, observemos que os pontos da semi-recta \overrightarrow{px} têm a forma $p + t(x - p)$, onde $t > 0$. Tal ponto pertence ao hiperplano \mathbb{R}^n , quando a sua última coordenada $1 + t(x^{n+1} - 1)$ é zero. Assim, tiramos $t = \frac{1}{1 - x^{n+1}}$. Dado que

$$p + \frac{x - p}{1 - x^{n+1}} = \frac{x - x^{n+1}p}{1 - x^{n+1}}$$

obtemos

$$\pi(x^1, \dots, x^n, x^{n+1}) = \frac{1}{1 - x^{n+1}} (x^1, \dots, x^n).$$

Esta expressão mostra que $\pi : S^n \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua. (Note-se que $x \in S^n \setminus \{p\}$ exclui que se tenha $x^{n+1} = 1$.) Para verificar que $\pi(\cdot)$ é um homeomorfismo, basta considerar a aplicação $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow S^n \setminus \{p\}$, definida por

$$\varphi(y^1, \dots, y^n) = \frac{2}{\|y\|^2 + 1} \left(y^1, \dots, y^n, \frac{\|y\|^2 - 1}{2} \right).$$

Com efeito, para todo o $x = (x^1, \dots, x^n, x^{n+1}) \in S^n \setminus \{p\}$,

$$\varphi(\pi(x^1, \dots, x^n, x^{n+1})) = \varphi\left(\frac{x^1}{1 - x^{n+1}}, \dots, \frac{x^n}{1 - x^{n+1}}\right)$$

e dado que

$$\|y\|^2 = \left\| \frac{1}{1 - x^{n+1}} (x^1, \dots, x^n) \right\|^2 = \frac{(x^1)^2 + \dots + (x^n)^2}{(1 - x^{n+1})^2} = \frac{1 - (x^{n+1})^2}{(1 - x^{n+1})^2};$$

$$\|y\|^2 - 1 = \frac{1 - (x^{n+1})^2 - (1 - x^{n+1})^2}{(1 - x^{n+1})^2} = \frac{2x^{n+1} (1 - x^{n+1})}{(1 - x^{n+1})^2} = \frac{2x^{n+1}}{1 - x^{n+1}};$$

$$\|y\|^2 + 1 = \frac{1 - (x^{n+1})^2 + (1 - x^{n+1})^2}{(1 - x^{n+1})^2} = \frac{2(1 - x^{n+1})}{(1 - x^{n+1})^2} = \frac{2}{1 - x^{n+1}};$$

vem

$$\varphi(\pi(x)) = (x^1, \dots, x^n, x^{n+1}) = x.$$

Por outro lado, para todo o $y = (y^1, \dots, y^n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\pi(\varphi(y^1, \dots, y^n)) = \pi\left(\frac{2y^1}{\|y\|^2 + 1}, \dots, \frac{2y^n}{\|y\|^2 + 1}, \frac{\|y\|^2 - 1}{\|y\|^2 + 1}\right)$$

e dado que

$$1 - x^{n+1} = 1 - \frac{\|y\|^2 - 1}{\|y\|^2 + 1} = \frac{2}{\|y\|^2 + 1}$$

temos também

$$\pi(\varphi(y)) = \frac{\|y\|^2 + 1}{2} \left(\frac{2y^1}{\|y\|^2 + 1}, \dots, \frac{2y^n}{\|y\|^2 + 1} \right) = y.$$

□

Teorema 97 Se M é compacto, toda a bijecção contínua $f : M \rightarrow N$ é um homeomorfismo.

Prova: Observemos, primeiro, que N é compacto. Já que $f(\cdot)$ é contínua, a sua inversa $g : N \rightarrow M$ é tal que se $F \subset M$ é fechado, e portanto compacto, então $g^{-1}(F) = f(F) \subset N$ é compacto e por conseguinte fechado. Logo, $g(\cdot)$ é contínua. ■

Teorema 98 A composição de uma função absolutamente contínua com outra absolutamente contínua e estritamente crescente, resulta numa função absolutamente contínua.

Prova: Se $f : X \rightarrow Y$ e $g : [a, b] \rightarrow X$ forem absolutamente contínuas com $g(\cdot)$ estritamente crescente, qualquer que seja o sistema finito de intervalos disjuntos dois a dois

$$(a_i, b_i), \quad i = 1, \dots, n$$

pertencentes a $[a, b]$,

$$(g(a_i), g(b_i)), \quad i = 1, \dots, n$$

Referências Bibliográficas

- [1] L. Ambrosio, O. Ascenzi, and G. Buttazzo, *Lipschitz regularity for minimizers of integral functionals with highly discontinuous integrands*, J. Math. Anal. Appl., 142 (1989), pp. 301-316.
- [2] G.A. Bliss, *Lectures on the Calculus of Variations*, Univ. of Chicago Press, 1946.
- [3] Y. G. Borisovich, N. M. Bliznyakov, T. N. Fomenko and Y. A. Izrailevich, *Introduction to Differential and Algebraic Topology*, Kluwer Academic Publishers, 2^a ed., 1995.
- [4] L. Cesari, *Optimization Theory and Applications*, Springer, New York, 1983.
- [5] F.H. Clarke, *The Maximum Principle under minimal hypotheses*, SIAM J. Control and Optimization, 14 (1976), 1078-1091.
- [6] F.H. Clarke, *Methods of Dynamic and Nonsmooth Optimization*, SIAM, Philadelphia, 1989.
- [7] F.H. Clarke and P.D. Loewen, *An intermediate existence theory in the calculus of variations*, Annali Scuola Norm. Sup. Pisa, 16 (1989), pp. 487-526.
- [8] F. H. Clarke and R. B. Vinter, *On the conditions under which the Euler equation or the maximum principle hold*, Appl. Math. Optim., 12 (1984), pp. 73-79.
- [9] F.H. Clarke and R.B. Vinter, *Regularity properties of solutions to the basic problem in the calculus of variations*, Trans. Amer. Math. Soc., 289 (1985), pp. 73-98.
- [10] F.H. Clarke and R.B. Vinter, *A regularity theory for variational problems with higher order derivatives*, Trans. Amer. Math. Soc., 320 (1990), pp. 227-251.
- [11] F.H. Clarke and R.B. Vinter, *Regularity properties of optimal controls*, SIAM J. Control and Optimization, vol. 28, no. 4 (1990), pp. 980-997.

- [12] B. Dacorogna, *Direct Methods in the Calculus of Variations*, Springer, Berlin Heidelberg, 1989.
- [13] G.M. Ewing, *Calculus of Variations with Applications*, Dover, 1985.
- [14] P.J. Fernandez, *Medida e Integração*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1976.
- [15] R.V. Gamkrelidze, *Principles of Optimal Control Theory*, Plenum Press, New York, 1978.
- [16] M. Giaquinta and S. Hildebrandt, *Calculus of Variations I*, Springer, Berlin Heidelberg, 1996.
- [17] M. Giaquinta and S. Hildebrandt, *Calculus of Variations II*, Springer, Berlin Heidelberg, 1996.
- [18] A.N. Kolmogórov y S.V. Fomín, *Elementos de La Teoría de Funciones y del Análisis Funcional*, 1984.
- [19] S. G. Krantz and H. R. Parks, *A Primer of Real Analytic Functions*, Birkhäuser, 1992.
- [20] S. Lang, *Real and Functional Analysis*, Springer, New York, 3ª ed., 1993.
- [21] M. Lavrentiev, *Sur quelques problèmes du calcul des variations*, Ann. Mat. Pura e Appl., 4 (1926), pp. 7-28.
- [22] E.L. Lima, *Espaços Métricos*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 2ª ed., 1983.
- [23] B. Manià, *Sopra un esempio di Lavrentieff*, Boll. Unione Mat. Italiana, 13 (1934), pp. 147-153.
- [24] C.B. Morrey, Jr., *Multiple integrals in the Calculus of Variations*, Springer, Berlin, 1966.
- [25] A.L. Peressini, F.E. Sullivan and J.J. Uhl, Jr., *The Mathematics of Nonlinear Programming*, Springer, 1993.
- [26] L.S. Pontryagin, V.G. Boltyanskii, R.V. Gamkrelidze and E.F. Mischenko, *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, Wiley, New York, 1962.
- [27] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, 3rd ed., McGraw-Hill, 1976
- [28] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, 3ª ed., 1987.

- [29] A.V. Sarychev, *First and Second-Order Integral Functionals of the Calculus of Variations Which Exhibit the Lavrentiev Phenomenon*, Preprint CM/I-31, Dep. de Matemática, Univ. de Aveiro, Maio de 1997.
- [30] E. M. Stein, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970.
- [31] H.J. Sussmann, *A strong version of the Maximum Principle under weak hypotheses*, Proc. 33rd IEEE Conference on Decision and Control, Orlando, FL, 1994, pp. 1950-1956.
- [32] H.J. Sussmann and J.C. Willems, *300 Years of Optimal Control: From the Brachystochrone to the Maximum Principle*, IEEE Control Systems, June 1997, pp. 32-44.
- [33] L. Tonelli, *Sur une méthode directe du calcul des variations*, Rend. Circ. Mat. Palermo 39 (1915), pp. 233-264.
- [34] L. C. Young, *Lectures on the Calculus of Variations and Optimal Control Theory*, Chelsea P. C., New York, 1980.

Índice Remissivo

- AC , *ver* função absolutamente contínua
- AC_φ , 25
- aderência, *ver* fecho
- aderente, 139
- Análise Não Suave, 72
- braquistócrona, 10
- C , 131
- Cálculo das Variações, 7
 - lema fundamental, 14
 - problema básico, 7
 - autónomo, 8
- C_φ , 25
- C^∞ , 131
- C^k , 131
- compactificação, 100
- condição do máximo, 108
- condições de fronteira, 8
- conjunto
 - convexo, 136
 - denso, 139
 - denso em si mesmo, 140
 - denso em um todo, 68, 139
 - fechado, 139
 - magro, 141
 - perfeito, 140
- controlo
 - ótimo, 147
 - admissível, 146
- Controlo Ótimo
 - problema de Lagrange, 128
- convergência, 134
 - pontual, *ver* convergência simples
 - simples, 134
 - uniforme, 134
- curvas, *ver* trajectórias
- Decomposição de Whitney, 58
- derivado, 139
- desigualdade
 - da Média Aritmética-Geométrica, 136
 - de Hölder, 43, 137
 - de Minkowski, 43, 138
 - de Schwarz, 124
 - de Young, 137
- difeomorfismo, 142
- equação de controlo, 145
- equação de Euler-Lagrange, 15
 - forma integral, 18
- estado, 145
- Exemplo de Manià, 88
- extremaes, 15
 - de duBois-Reymond, 18
 - de Pontryagin, 109
- fecho, 139
- fenómeno de Lavrentiev, 2, 87
- função
 - absolutamente contínua, 132
 - Borel-mensurável, 103
 - chapéu, 66
 - coerciva, 35
 - convexa, 136

- de Cantor, 46
 - de variação limitada, 140
 - essencialmente limitada, 141
 - estritamente convexa, 136
 - lipschitziana, 16, 132
 - localmente lipschitziana, 132
 - seccionalmente contínua, 131
 - semi-contínua inferior, 134
 - singular, 45
- homeomorfismo, 148
- integral de Lebesgue, 15
- lagrangeano, 8
- lagrangeano elíptico, 53
- Lema
- de duBois-Reymond, 17
 - de Lavrentiev, 26
- L_∞ , 141
- L_p , 135
- mínimo
- global, 11
 - local, 11
 - forte, 11
 - fraco, 12
- matriz Hessiana, 143
- medida de Lebesgue, *ver* $m(\cdot)$
- $m(\cdot)$, 37
- norma essencial, 141
- pólo norte, 101
- parâmetro de controlo, 145
- paradoxo de Euler, 55
- PC , *ver* função seccionalmente contínua
- PC^1 , 131
- PMP, *ver* princípio do máximo de Pontryagin
- ponto
- de acumulação, 139
 - isolado, 139
- princípio do máximo de Pontryagin, 107
- problema de tempo mínimo, 99, 147
- processo óptimo, *ver* solução óptima
- projectão estereográfica, 101, 148
- sistema adjunto, 120
- sistema de controlo, 146
- solução óptima, 147
- Teorema
- da existência de Tonelli, 35, 58
 - da função implícita, 85, 142
 - da função inversa, 142
 - de Baire, 141
 - de Lavrentiev, 76
 - de Lusin, 140
 - de Tonelli, 73
 - de Whitney, 58, 67
 - do Valor Médio, 39
- Tonelli, 1
- trajectórias, 8
- admissíveis, 8
- TVM, *ver* Teorema do Valor Médio
- variação total, 140
- variações, 12
- vector velocidade, 145
- $W_{1,1}$, 95
- Weierstrass, 15, 84
- exemplo de, 21
- $W_{m,1}$, 111
- $W_{m,p}$, 111
- $\dot{x}(\cdot)$, 8
- zig-zags, 55, 57